Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

76. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 7. JUNI 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 83 03 01, Fernschreibnummer 01-83 319
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27 9 01, Fernschreibnummer 04-61 723
Göttingen, Weender Straße 60.

---

76. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Vogel, W., Lineare Programme und allgemeine Vertretersysteme 103

Schubert, H., Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen 116

Loonstra, F., Darstellungen von Gruppen als homomorphes Bild 149

André, J., Über Parallelstrukturen. Teil II: Translationsstrukturen 155

Babister, A. W., An inhomogeneous hypergeometric function 164

Berz, E., Lösung der linearen Differentialgleichung durch Transformation in einen Schiefkörper 179

Künneth, H., Zu einem Satz von Hjelmslev über monotone Bogen 194

Vogel, W.
Math. Zeitschr. 76, 103–115 (1961)

Lineare Programme und allgemeine Vertretersysteme

Von

Walter Vogel

1. Einleitung. Unter einem linearen Programm versteht man die Bestimmung des Extremwertes einer linearen Funktion (in mehreren Veränderlichen) unter linearen Nebenbedingungen. In den Jahren 1946/47 fand G. B. Dantzig dafür ein Rechenverfahren (die sog. *Simplex-Methode*), und seit dieser Zeit hat man eine große Zahl von Anwendungsmöglichkeiten auf wirtschaftlichem und militärischem Bereich gefunden. In den letzten Jahren ist die Theorie der linearen Programme aber auch zur Lösung kombinatorischer Probleme herangezogen worden. Auf diese Weise haben z. B. Ford, Fulkerson, Hoffman und Kuhn in [4] und [11] notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Vertretersystemen gefunden. Ein Vertretersystem für ein System von Teilmengen $\mathscr{A}_i$ einer Menge $\mathscr{A}$ ist eine Teilmenge $\mathscr{S}$ von $\mathscr{A}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\mathscr{A}_i$ ein Element a aus $\mathscr{S}$ mit $a \in \mathscr{A}_i$ gefunden werden kann. In [11] wird zusätzlich verlangt, daß einige vorgeschriebene Elemente von $\mathscr{A}$ zu $\mathscr{S}$ gehören sollen und daß die Vertreter verschiedener Teilmengen voneinander verschieden sein sollen. In [4] wird der Fall behandelt, daß das Element a_k wenigstens α_k-mal und höchstens β_k-mal als Vertreter einer Menge auftritt.

Wir behandeln hier Vertretersysteme mit anderen Nebenbedingungen. Ihre Definition findet man im Abschnitt 4. Als Vorbereitung wollen wir in diesem und dem nächsten Abschnitt einiges über lineare Programme zusammenstellen. In Abschnitt 3 werden dann Sätze über Matrizen aus Nullen und Einsen bewiesen. Diese Sätze liefern fast unmittelbar die Aussagen über Vertretersysteme aus dem Abschnitt 4.

Wir benutzen folgende Bezeichnungsweisen: a, b, x, y usw. stellen Spalten-Vektoren und A, B usw. stellen Matrizen dar. a' (bzw. A') bedeutet den Übergang zum transponierten Vektor (bzw. zur transponierten Matrix). So ist z. B. $x' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Das Zeichen 0 schreiben wir sowohl für die Ziffer Null als auch für den Null-Vektor oder die Null-Matrix. Die Dimension wird bei Matrizen und Vektoren nicht eigens angegeben, sie kann stets aus dem Zusammenhang entnommen werden. Wenn z. B. A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist und wenn die Gleichung $Ax = b$ angeschrieben wird, so ist vorausgesetzt, daß x ein n-dimensionaler und b ein m-dimensionaler Spaltenvektor ist. I bedeutet immer die Einheitsmatrix. Wir setzen Matrizen und Vektoren zu neuen Matrizen zusammen; z. B. $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oder $B = (A, I)$. Die Formel $x \geqq 0$ bedeutet: jede Komponente von x ist größer oder gleich Null.

Mit diesen Bezeichnungen schreiben wir nun ein lineares Programm an

$$\mathfrak{P}: \quad \text{Suche} \quad \max\left\{c'x + d'y \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{P}\right\}.$$

Dabei sei

$$\mathscr{P} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1 x + A_2 y \leqq a \\ B_1 x + B_2 y = b \end{array}, \; x \geqq 0\right\}.$$

Es hat sich folgende Terminologie eingebürgert:

Jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{P}$ heißt eine zulässige Lösung.

Jede zulässige Lösung, welche das Maximum liefert, heißt eine optimale Lösung.

Neben $\mathfrak{P}$ wollen wir das Programm $\mathfrak{Q}$ einführen.

$$\mathfrak{Q}: \quad \text{Suche} \quad \min\left\{a'u + b'v \;\middle|\; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}\right\}.$$

Dabei sei

$$\mathscr{Q} = \left\{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A_1' u + B_1' v \geqq c \\ A_2' u + B_2' v = d \end{array}, \; u \geqq 0\right\}.$$

Die Programme $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ heißen zueinander dual. Ihre gegenseitige Beziehung wird in Satz 1.1 ausgesprochen.

SATZ 1.1. *Die drei folgenden Aussagen sind gleichwertig.*

(i) *Das Programm $\mathfrak{P}$ hat eine optimale Lösung.*

(ii) *Das Programm $\mathfrak{Q}$ hat eine optimale Lösung.*

(iii) *$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ besitzen zulässige Lösungen.*

Gilt eine der drei Aussagen (und damit auch die beiden anderen), so ist

$$\max(c'x + d'y) = \min(a'u + b'v).$$

Dieser Satz heißt der *Dualitätssatz* für lineare Programme. Beweise findet man z.B. in [5] oder [2].

2. Unimodulare Matrizen und lineare Programme. Der Inhalt dieses Abschnitts kann folgendermaßen wiedergegeben werden: Eine unimodulare Matrix kann zur Definition einer konvexen Menge mit ganzzahligen Ecken (d.h. mit Ecken, deren Koordinaten ganze Zahlen sind) benutzt werden. Wenn ein lineares Programm eine optimale Lösung besitzt, so besitzt es auch eine optimale Ecke. Mit Hilfe unimodularer Matrizen kann man daher lineare Programme mit ganzzahligen Lösungen konstruieren. Dies ist im wesentlichen schon bekannt, doch sind die folgenden Ausführungen als Einleitung für die nächsten Abschnitte notwendig.

DEFINITION. Eine Matrix heißt *unimodular*, wenn jede ihrer Unterdeterminanten einen der Werte $+1$, 0 oder -1 hat.

Man sieht leicht: Jede Teilmatrix einer unimodularen Matrix ist wieder unimodular. Mit A ist auch A' unimodular. Als Elemente einer unimodularen Matrix kommen nur die Zahlen $+1$, 0 oder -1 in Betracht, denn die Elemente sind spezielle Unterdeterminanten.

Die Matrix des weiter unten stehenden Gleichungssystemes (in $x_{i,k}$) ist unimodular. Dies folgt sofort aus Theorem 3 in [9, S. 233] oder aus [8, S. 252].

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} = r_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = s_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir schreiben als Beispiel eine Matrix für $m=4$ und $n=3$ an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & & & 1 & & & & & \\ & 1 & & & 1 & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & & 1 & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & 1 & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Für den folgenden Satz erinnern wir zunächst an die Definition der Ecke einer konvexen Menge.

Definition. x heißt eine *Ecke* der konvexen Menge $\mathfrak{K}$, wenn aus $x, y, z \in \mathfrak{K}$ und $x=(y+z)/2$ stets folgt, daß $x=y=z$ ist.

Satz 2.1. *Sei A unimodular und seien b und c ganzzahlige Vektoren. Dann besitzen die konvexen Mengen*

$$\mathfrak{K}_1 = \{x \mid A\,x \leqq b,\ 0 \leqq x\}$$

und

$$\mathfrak{K}_2 = \{x \mid A\,x \leqq b,\ 0 \leqq x \leqq c\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

Natürlich kann $\mathfrak{K}_i$ $(i=1, 2)$ auch leer sein. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so gibt es wenigstens eine Ecke in $\mathfrak{K}_i$. Den Beweis des Satzes findet man in [9, Theorem 2, S. 225].

Wir wollen nun zeigen:

Lemma 2.2. *Wenn $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ unimodular ist, so sind auch $B = \begin{pmatrix} A_1, I \\ A_2, 0 \end{pmatrix}$ und $C = (A', -A_2')$ unimodular.*

Beweis. 1. Man entwickelt jede Unterdeterminante von B zuerst nach den Spalten, welche aus dem Teil $\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ stammen. Auf diese Weise erhält man $+1$, -1 oder 0 mal Wert einer Unterdeterminante von A. 2. Eine Unterdeterminante von C, welche zwei entsprechende Spalten aus A' und A_2' enthält, hat den Wert Null. Jede andere Unterdeterminante kann durch

Multiplikation der Spalten aus $-A_2'$ mit -1 und anschließende Permutation der Spalten in eine Unterdeterminante von A' übergeführt werden. Da sich dabei nur den Faktor $+1$ oder -1 erhält, so folgt die Behauptung des Lemmas.

Schreibt man $Ax=b$ in der Form $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leqq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, so liefert der Satz 2. unmittelbar den

SATZ 2.3. *Sei A unimodular und seien b und c ganzzahlige Vektoren. Dann haben die konvexen Mengen*

$$\mathfrak{K}_3 = \{x \mid Ax = b,\ 0 \leqq x\}$$

und

$$\mathfrak{K}_4 = \{x \mid Ax = b,\ 0 \leqq x \leqq c\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem linearen Programm $\mathfrak{L}$.

$$\mathfrak{L}: \quad \text{Suche} \quad \max\{c'x \mid x \in \mathfrak{K}\}$$

wobei $\mathfrak{K} = \{x \mid Ax = b,\ x \geqq 0\}$ ist.

LEMMA 2.4. *Wenn das Programm $\mathfrak{L}$ eine optimale Lösung besitzt, so besitzt es auch eine optimale Ecke.*

BEWEIS. Sei $\max\{c'x \mid x \in \mathfrak{K}\} = \lambda$ und sei

$$\mathfrak{K}_0 = \{x \mid Ax = b,\ c'x = \lambda,\ x \geqq 0\}.$$

$\mathfrak{K}_0$ ist die Menge der optimalen Lösungen. Sie ist nach Voraussetzung nicht leer, besitzt also eine Ecke (einen Beweis, daß jede nicht leere Menge der Form $Bx=c,\ x \geqq 0$ eine Ecke hat, findet man in [2, S. 84]). Wir zeigen, daß jede Ecke von $\mathfrak{K}_0$ auch eine Ecke von $\mathfrak{K}$ sein muß. Sei x eine Ecke von $\mathfrak{K}_0$, sei $x=(y+z)/2$ und seien y und z Punkte aus $\mathfrak{K}$. Dann gilt

$$c'y \leqq c'x = (c'y + c'z)/2 \quad \text{oder} \quad c'y \leqq c'z$$

und

$$c'z \leqq c'x = (c'y + c'z)/2 \quad \text{oder} \quad c'z \leqq c'y.$$

Es ist also $c'y = c'z = c'x$; y und z liegen in $\mathfrak{K}_0$, und da x eine Ecke von $\mathfrak{K}_0$ ist, so folgt $x=y=z$. Daher ist x auch eine Ecke von $\mathfrak{K}$.

Wir wenden jetzt das Vorhergehende auf das lineare Programm $\mathfrak{P}$ an.

$$\mathfrak{P}: \quad \text{Suche} \quad \max(c'x + d'y)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} A_1x + A_2y &\leqq a \\ B_1x + B_2y &= b \\ x &\geqq 0. \end{aligned}$$

Es gilt:

LEMMA 2.5. *Wenn a und b ganzzahlig sind, wenn $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ unimodular ist und wenn $\mathfrak{P}$ eine optimale Lösung besitzt, so besitzt $\mathfrak{P}$ auch eine ganzzahlige optimale Lösung.*

BEWEIS. Neben $\mathfrak{P}$ führen wir das lineare Programm $\mathfrak{R}$ ein.

$$\mathfrak{R}: \quad \text{Suche} \quad \max(c'x + d'y_1 - d'y_2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & -A_2, & I \\ B_1, & B_2, & -B_2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \geqq 0.$$

Jede Lösung (zulässig oder optimal) von $\mathfrak{R}$ liefert eine Lösung von $\mathfrak{P}$, und aus jeder Lösung von $\mathfrak{P}$ kann man durch Aufspalten von y (in der Form $y = y_1 - y_2$ mit $y_1, y_2 \geqq 0$) Lösungen von $\mathfrak{R}$ gewinnen. Mit $\mathfrak{P}$ besitzt daher auch $\mathfrak{R}$ eine optimale Lösung. Wir beweisen das Lemma, indem wir zeigen, daß $\mathfrak{R}$ eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt. Nach Lemma 2.2 ist mit

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix} \quad \text{auch} \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & -A_2, & I \\ B_1, & B_2, & -B_2, & 0 \end{pmatrix}$$

unimodular, nach Satz 2.3 ist daher jede Ecke ganzzahlig, und nach Lemma 2.4 gibt es eine optimale Ecke. $\mathfrak{R}$ besitzt also eine ganzzahlige optimale Lösung. Daher besitzt auch $\mathfrak{P}$ eine ganzzahlige optimale Lösung.

Natürlich kann man eine dem Lemma 2.5 entsprechende Aussage auch über das zu $\mathfrak{P}$ duale Programm machen. Zusammen mit dem Dualitätssatz (Satz 1.1) ergibt sich dann:

SATZ 2.6. *Seien a, b, c und d ganzzahlige Vektoren und sei* $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ *eine unimodulare Matrix. Wir nehmen an, daß die durch die Systeme*

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} A_1 x + A_2 y \leqq a \\ B_1 x + B_2 y = b \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

und

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} A_1' u + B_1' v \geqq c \\ A_2' u + B_2' v = d \\ u \geqq 0 \end{cases}$$

definierten Mengen nicht leer sind. Dann gibt es auch ganzzahlige Punkte in den durch (i) *und* (ii) *definierten Mengen und es gilt:*

$$\max(c'x + d'y) = \min(a'u + b'v).$$

Dabei ist das Maximum (bzw. das Minimum) über die ganzzahligen Lösungen von (i) (*bzw. von* (ii)) *zu nehmen.*

3. Matrizen aus Nullen und Einsen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ die Menge der $m \times n$-Matrizen $(x_{i,k})$, welche den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} \leqq r, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \leqq s, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$0 \leqq x_{i,k} \leqq 1$$

genügen. Dabei seien r und s ganze positive Zahlen.

$\mathcal{M}$ ist nicht leer, denn $x_{i,k} = 0$ (für alle i und k) liefert ein Element aus $\mathcal{M}$.

Mit $\mathcal{M}_0$ bezeichnen wir die Menge der Matrizen aus $\mathcal{M}$, für welche $x_{i,k}$ nur die Werte 0 oder 1 annimmt.

SATZ 3.1. *$\mathcal{M}$ ist die konvexe Hülle von $\mathcal{M}_0$.*

BEWEIS. Die konvexe Menge $\mathcal{M}$ hat nach Satz 2.1 nur ganzzahlige Ecken, diese können wegen $0 \leqq x_{i,k} \leqq 1$ nur aus Nullen und Einsen bestehen; die Ecken von $\mathcal{M}$ liegen also in $\mathcal{M}_0$. Jeder Punkt aus $\mathcal{M}_0$ ist eine Ecke von $\mathcal{M}$, denn wenn

$$(x_{i,k}) = \big((y_{i,k}) + (z_{i,k})\big)/2$$

ist, wobei $(y_{i,k})$ und $(z_{i,k})$ aus $\mathcal{M}$ sind, so folgt aus $x_{i,k} = 0$ (aus $x_{i,k} = 1$), daß auch $y_{i,k} = z_{i,k} = 0$ (daß auch $y_{i,k} = z_{i,k} = 1$) ist. $\mathcal{M}_0$ ist daher genau die Menge der Ecken von $\mathcal{M}$, und da $\mathcal{M}$ beschränkt ist, so wird es von seinen Ecken aufgespannt (s. z.B. [3]).

Wir definieren die Menge $\mathcal{N}$ der Matrizen $(x_{i,k})$ durch

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} = r, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = s, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$0 \leqq x_{i,k} \leqq 1.$$

Dabei seien r und s positive ganze Zahlen, und es gelte die Gleichung $sm = rn$.

$\mathcal{N}$ ist nicht leer, denn $x_{i,k} = s/n = r/m$ (für alle i und k) liefert ein Element aus $\mathcal{N}$.

Mit $\mathcal{N}_0$ bezeichnen wir die Menge der Matrizen aus $\mathcal{N}$, für welche $x_{i,k}$ nur die Werte 0 oder 1 annimmt. Genauso wie den Satz 3.1 beweist man den folgenden Satz.

SATZ 3.2. *$\mathcal{N}$ ist die konvexe Hülle von $\mathcal{N}_0$.*

Setzt man insbesondere $r = s = 1$ und $n = m$, so sind die Matrizen aus N gerade die *doppelt stochastischen Matrizen*, und die Matrizen aus $\mathcal{N}_0$ sind die *Permutationsmatrizen*. Der Satz 3.2 lautet dann:

KOROLLAR 3.3. *Die doppelt stochastischen Matrizen bilden die konvexe Hülle der Permutationsmatrizen.*

Korollar 3.3 wurde zuerst 1941 von G. BIRKHOFF in [1] bewiesen.

Sei $(d_{i,k})$ eine $m \times n$-Matrix, welche nur aus Nullen und Einsen besteht. Wir interessieren uns für das lineare Programm $\mathfrak{M}$.

$$\mathfrak{M}: \quad \text{Suche} \quad \lambda = \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} x_{i,k} \,\middle|\, (x_{i,k}) \in \mathcal{M} \right\}.$$

Das dazu duale Programm $\mathfrak{M}'$ lautet

$$\mathfrak{M}': \quad \text{Suche} \quad \mu = \min \left\{ s \sum_{i=1}^{m} u_i + r \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} w_{i,k} \right\}$$

unter den Nebenbedingungen

$$(3.1) \quad u_i + v_k + w_{i,k} \geqq d_{i,k}, \quad u_i, v_k, w_{i,k} \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Offenbar gibt es zulässige Lösungen für $\mathfrak{M}'$, man setze z.B. alle u_i, v_k und $w_{i,k}$ gleich Eins.

Da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ zulässige Lösungen haben, so besitzen sie auch optimale Lösungen, und es gilt $\lambda = \mu$.

Die zur Definition der Menge $\mathcal{M}$ verwandte Matrix ist unimodular, daher ist der Satz 2.6 auf die dualen Programme $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ anwendbar. Natürlich braucht man bei der Suche nach einem Minimum in $\mathfrak{M}'$ für u_i, v_k und $w_{i,k}$ nur die Werte 0 oder 1 in Betracht zu ziehen; größere ganze Zahlen machen die zu minimierende Linearform bestimmt unnötig groß. Deshalb läßt sich der Dualitätssatz für dieses Problem wie folgt formulieren:

SATZ 3.4. *Es ist*

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} x_{i,k} \right\} = \min \left\{ s \sum_{i=1}^{m} u_i + r \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} w_{i,k} \right\},$$

wobei u_i, v_k, $w_{i,k}$ und $x_{i,k}$ entweder 0 oder 1 sind und den Bedingungen $u_i + v_k + w_{i,k} \geqq d_{i,k}$ und $(x_{i,k}) \in \mathcal{M}$ unterworfen sind.

Der folgende Satz ist nur eine andere Formulierung dieser Aussage.

SATZ 3.5. *Sei $(d_{i,k})$ eine $m \times n$-Matrix aus Nullen und Einsen und seien r und s zwei ganze positive Zahlen. Die Maximalzahl der Einsen, welche in $(d_{i,k})$ so gefunden werden können, daß höchstens s in jeder Zeile und höchstens r in jeder Spalte stehen, ist gleich dem Minimum des Ausdrucks $sp + rq + a$, wobei p, q und a die folgende Bedingung erfüllen: es ist möglich, mit p Zeilen, q Spalten und a einzelnen Zellen alle Einsen von $(d_{i,k})$ zu überdecken.*

BEWEIS. Sei $(x_{i,k}) \in \mathcal{M}_0$. In $(x_{i,k})$ ist die Anzahl der Einsen je Zeile höchstens gleich s und die Anzahl der Einsen je Spalte höchstens gleich r. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} x_{i,k}$ zählt also Einsen aus $(d_{i,k})$, wobei höchstens s Einsen je Zeile und höchstens r Einsen je Spalte gezählt werden. Das Maximum dieser Anzahl ist λ. Nach Satz 3.4 ist $\lambda = \mu = \min(sp + rq + a)$, wobei

$$(3.2) \qquad p = \sum_{i=1}^{m} u_i, \qquad q = \sum_{k=1}^{n} v_k, \qquad a = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} w_{i,k}$$

gesetzt wurde. Wegen $u_i+v_k+w_{i,k}\geqq d_{i,k}$ werden die Einsen in $(d_{i,k})$ durch die p Zeilen (für deren Index die Gleichung $u_i=1$ gilt), durch die q Spalten (mit $v_k=1$) und durch die a Zeilen (mit $w_{i,k}=1$) überdeckt. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist $r=1$, so kann man in der Definition von $\mathfrak{M}$ die Bedingung $x_{i,k}\leqq 1$ weglassen; sie ist sowieso erfüllt. Im dualen Programm $\mathfrak{M}'$ darf man dann $w_{i,k}=0$ (für alle Paare i, k) setzen. Aus Satz 3.4 wird damit

SATZ 3.6. *Es ist*

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\,x_{i,k}\right\}=\min\left\{s\sum_{i=1}^{m}u_i+\sum_{k=1}^{n}v_k\right\},$$

wobei u_i und v_k entweder 0 oder 1 sind und den Bedingungen $u_i+v_k\geqq d_{i,k}$ unterworfen sind. Das Maximum ist über alle $(x_{i,k})$ aus $\mathfrak{M}_0$ (mit $r=1$) zu nehmen.

Daraus folgt:

KOROLLAR 3.7. *Die Maximalzahl der Einsen in der Matrix $(d_{i,k})$, wobei höchstens s Einsen in jeder Zeile und höchstens eine Eins in jeder Spalte stehen, ist gleich dem Minimum des Ausdrucks $sp+q$, wobei mit p Zeilen und q Spalten alle Einsen aus $(d_{i,k})$ überdeckt werden können.*

Ist $r=s=1$, so gilt:

KOROLLAR 3.8. *Die Maximalzahl der Einsen in der Matrix $(d_{i,k})$ mit nicht mehr als einer Eins je Zeile oder Spalte ist gleich der Minimalzahl der Reihen (Zeilen oder Spalten), welche zusammen alle Einsen überdecken.*

Den Satz 3.6 mit $r=s=1$ aber beliebigen ganzzahligen $d_{i,k}\geqq 0$ findet man in [*6*, S. 67]. Das Korollar 3.8 wurde 1931 von D. KÖNIG bewiesen (s. [*12*, S. 240, Satz D]).

Für den nächsten Satz brauchen wir die Aussage

$\mathfrak{A}$: { Für die Anzahl a der im Durchschnitt von p beliebigen Zeilen und q beliebigen Spalten der Matrix $(d_{i,k})$ enthaltenen Einsen gilt $a\geqq sp+rq-rn$.

SATZ 3.9. *$\mathfrak{A}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß*

$$\lambda=\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\,x_{i,k}\;\middle|\;(x_{i,k})\in\mathfrak{M}\right\}=s\,m$$

ist.

BEWEIS. 1. Es gelte $\mathfrak{A}$. Wir suchen $\mu=\min(sp+rq+a)$, wobei p, q und a wie in (3.2) definiert sind. u_i, v_k und $w_{i,k}$ sind entweder 0 oder 1 und genügen den Ungleichungen (3.1). Diese Ungleichungen sind für die p Indizes i mit $u_i=1$ und für die q Indizes k mit $v_k=1$ erfüllt, gleich welchen Wert $w_{i,k}$ hat. Für die restlichen $(m-p)(n-q)$ Indexpaare (i,k), welche dabei noch nicht berücksichtigt wurden, gilt: wenn $d_{i,k}=1$ ist, so muß auch $w_{i,k}=1$ sein. Daher ist

$$a=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} w_{i,k}$$

größer oder gleich der Anzahl der $d_{i,k}$, welche im Durchschnitt der $(m-p)$ Zeilen und $(n-q)$ Spalten liegen und gleich Eins sind. Wegen $\mathfrak{A}$ gilt also

$$a \geqq s(m-p) + r(n-q) - rn$$

oder

$$sp + rq + a \geqq sm.$$

Damit ist gezeigt, daß $\mu = \min(sp + rq + a) \geq sm$ ist. Setzt man aber alle $u_i = 1$ und alle v_k und $w_{i,k}$ gleich 0, so ist (3.1) erfüllt, und die Linearform $sp + rq - a$ wird gleich sm. Also ist $\mu = sm$ und nach dem Dualitätssatz auch $\lambda = sm$.

2. Sei nun $\lambda = sm = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} x_{i,k}$ und $(x_{i,k}) \in \mathfrak{M}_0$. Wegen $\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \leqq s$ und $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \leqq sm$ muß dann $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = sm$ und $\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = s$ sein. Ferner folgt: wenn $x_{i,k} = 1$ ist, so ist auch $d_{i,k} = 1$. Es reicht also, die Bedingung $\mathfrak{A}$ für die Matrix $(x_{i,k})$ zu beweisen, sie gilt dann auch für die Matrix $(d_{i,k})$.

Für jede beliebige Matrix aus Nullen und Einsen gilt: Anzahl aller „1" in der Matrix + Anzahl der „1" im Durchschnitt von p Zeilen und q Spalten ist größer oder gleich der Anzahl der „1" in den p Zeilen + Anzahl der „1" in den q Spalten.

In unserem Falle erhält man daraus (angewandt auf $(x_{i,k})$)

$$sm + a \geqq sp + x. \tag{3.3}$$

Hierbei ist

sm = Anzahl aller „1" in $(x_{i,k})$,
a = Anzahl der „1" im Durchschnitt von p Zeilen und q Spalten,
sp = Anzahl der „1" in den p Zeilen,
x = Anzahl der „1" in den q Spalten.

Sei nun y die Anzahl der „1" in den komplementären $(n-q)$ Spalten. Dann gilt

$$x + y = sm \quad \text{und} \quad y \leqq r(n-q),$$

denn die Summe der „1" pro Spalte ist höchstens gleich r. Aus diesen Bedingungen und (3.3) folgt die Ungleichung $a \geqq sp + rq - rn$. Damit ist $\mathfrak{A}$ hergeleitet.

Im Sonderfall $r = 1$ braucht man die Bedingung

$\mathfrak{B}$: *Bei irgend p Zeilen der Matrix $(d_{i,k})$ stehen in wenigstens sp verschiedenen Spalten Einsen.*

Satz 3.10. *$\mathfrak{B}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß*

$$\lambda = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} x_{i,k} \,\middle|\, (x_{i,k}) \in \mathfrak{M} \right\} = sm$$

ist. Hierbei ist $\mathfrak{M}$ mit $r = 1$ definiert.

BEWEIS. 1. Es gelte $\mathfrak{B}$. Wir wenden den Satz 3.6 an. Sei $\mu = \min(sp+q)$, wobei p und q wie in (3.2) definiert sind. Die u_i und v_k sind entweder 0 oder 1 und genügen den Ungleichungen $u_i + v_k \geqq d_{i,k}$. Da für die p Indizes i mit $u_i = 1$ diese Ungleichungen bestimmt erfüllt sind, untersuchen wir die $(m-p)$ komplementären Indizes. In den entsprechenden Zeilen gibt es (wegen $\mathfrak{B}$) wenigstens $s(m-p)$ Spalten, welche Einsen enthalten. Daher muß $q \geqq s(m-p)$ sein. Es folgt: $sp+q \geqq sm$, und genau wie beim Beweise von Satz 3.9 schließen wir, daß $sm = \min(sp+q) = \lambda$ ist.

2. Sei nun $\lambda = sm$. Für eine optimale Matrix $(x_{i,k})$ aus $\mathfrak{M}_0$ gilt dann (vgl. den Beweis von Satz 3.9)

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = sm \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = s.$$

Für irgend p Zeilen (Menge der dazu gehörenden Indizes $= \mathfrak{I}$) ist also

$$\sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} = sp.$$

In jeder Spalte der Matrix $(x_{i,k})$ steht höchstens eine Eins, also ist sp gleich der Anzahl der Spalten, für welche in einer der p Zeilen eine Eins steht. Da $(d_{i,k})$ höchstens zusätzliche Einsen gegenüber $(x_{i,k})$ enthält, so folgt: sp ist kleiner oder gleich der Anzahl der Spalten der Matrix $(d_{i,k})$, welche in einer der p Zeilen eine Eins haben. Damit ist Satz 3.10 bewiesen.

Sei jetzt $r = s = 1$.

KOROLLAR 3.11. *Notwendig und hinreichend dafür, daß man in der Matrix $(d_{i,k})$ m Einsen finden kann, derart, daß höchstens eine Eins je Zeile oder Spalte auftritt, ist die Bedingung: Irgend p verschiedene Zeilen haben in wenigstens p verschiedenen Spalten eine Eins stehen.*

4. Vertreter-Systeme. Wir wollen nun die Sätze des vorhergehenden Abschnittes anwenden. Zuerst erklären wir, was wir unter einem Vertreter-System verstehen wollen.

Sei $\mathscr{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge mit den n Elementen a_k. $\mathscr{A}_i$ und $\mathscr{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ seien Teilmengen von $\mathscr{A}$. Wir nennen die Mengen $\mathscr{S}_i$ ein (r, s)-Vertreter-System der Mengen $\mathscr{A}_i$, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(i) $\mathscr{S}_i \subseteq \mathscr{A}_i$ (die $\mathscr{S}_i$ sind „Vertreter" der Mengen $\mathscr{A}_i$).

(ii) $\mathscr{S}_i$ enthält genau s Elemente.

(iii) Jedes Element a_k kommt in höchstens r verschiedenen Mengen $\mathscr{S}_i$ vor.

Aus den Bedingungen folgt: Bei einem $(1, s)$-Vertreter-System sind die Mengen $\mathscr{S}_i$ paarweise elementefremd.

Für ein $(1, 1)$-Vertreter-System lassen sich die Bedingungen (i), (ii) und (iii) zusammenfassen zu

(iv) Zu jeder Menge $\mathscr{A}_i$ gibt es ein Element als Vertreter; die Vertreter verschiedener Mengen $\mathscr{A}_i$ sind voneinander verschieden.

(1, 1)-Vertreter-Systeme wurden zuerst 1935 von PH. HALL in [7] betrachtet.

Wir definieren nun eine Matrix $(d_{i,k})$, welche wir dann in die Sätze 3.9 und 3.10 einsetzen wollen.

$$d_{i,k}=1 \quad \text{für} \quad a_k \in \mathcal{A}_i,$$
$$d_{i,k}=0 \quad \text{für} \quad a_k \notin \mathcal{A}_i.$$

SATZ 4.1. *Wenn für ein* $(x_{i,k}) \in \mathcal{M}_0$ *die Beziehung*

$$s\,m = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, x_{i,k} \tag{4.1}$$

besteht, so gibt es ein (r, s)*-Vertreter-System. Existiert ein* (r, s)*-Vertreter-System, so gibt es eine Matrix* $(x_{i,k}) \in \mathcal{M}_0$*, für die* (4.1) *gilt.*

BEWEIS. 1. Sei $(x_{i,k}) \in \mathcal{M}_0$ gegeben und gelte (4.1). Wir definieren $\mathcal{S}_i$ als die Menge derjenigen a_k, für deren Index k die Gleichung $x_{i,k}=1$ gilt. Aus (4.1) folgt: Wenn $x_{i,k}=1$ ist, so ist auch $d_{i,k}=1$ (s. den Beweis von Satz 3.9), also folgt aus $x_{i,k}=1$, daß $a_k \in \mathcal{A}_i$ liegt. Dies liefert: (i) $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{A}_i$.

Da $\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}=s$ ist, so enthält $\mathcal{S}_i$ genau s Elemente. Damit ist (ii) gezeigt.

Aus $\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} \leqq r$ folgt, daß a_k in höchstens r verschiedenen $\mathcal{S}_i$ liegen kann; also gilt auch (iii).

2. Sei nun ein (r, s)-Vertreter-System gegeben. Wir setzen $x_{i,k}=1$, wenn a_k in $\mathcal{S}_i$ liegt. Sonst sei $x_{i,k}=0$. Wegen (ii) hat man $\sum_{k=1}^{n} x_{i,k}=s$ und wegen (iii) hat man $\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} \leqq r$. Da wegen (i) aus $x_{i,k}=1$ die Gleichung $d_{i,k}=1$ folgt, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, x_{i,k} = s \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, x_{ik} = s\,m.$$

Damit ist Satz 4.1 bewiesen.

In Verbindung mit den Überlegungen des vorigen Abschnitts ergeben sich nun die folgenden Sätze.

SATZ 4.2. *Sei* $\mathcal{T}$ *eine Teilmenge von* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{I}$ *eine Teilmenge von* $\{1, 2, \ldots, m\}$. *Mit* $|\mathcal{T}|$ *(bzw.* $|\mathcal{I}|$*) bezeichnen wir die Anzahl der Elemente in* $\mathcal{T}$ *(bzw. in* $\mathcal{I}$*). Mit dieser Bezeichnungsweise gilt: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines* (r, s)*-Vertreter-Systems ist, daß für jedes* $\mathcal{T}$ *und für jedes* $\mathcal{I}$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{T}| \geqq s|\mathcal{I}| + r|\mathcal{T}| - rn$$

ist.

SATZ 4.3. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines* $(1, s)$*-Vertreter-Systems ist die Bedingung: Irgend* p *verschiedene Mengen* $\mathcal{A}_i$ *enthalten zusammen wenigstens* sp *verschiedene Elemente.*

KOROLLAR 4.4. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines* $(1, 1)$*-Vertreter-Systems ist, daß irgend* p *verschiedene Mengen* $\mathcal{A}_i$ *unter sich wenigstens* p *verschiedene Elemente enthalten.*

Mit Rücksicht auf den Satz 4.1 folgt der Satz 4.2 unmittelbar aus dem Satz 3.9, der Satz 4.3 folgt unmittelbar aus dem Satz 3.10, und das Korollar 4.4 folgt aus dem Korollar 3.11.

Korollar 4.4 ist der klassische Satz über Vertreter-Systeme. Er gilt auch für unendliche Mengen. Man sehe dazu [7] und [6].

Benutzt man statt der Matrix $(d_{i,k})$ die dazu transponierte Matrix, so erhält man sofort

SATZ 4.5. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines $(r, 1)$-Vertreter-Systems ist die Bedingung: Irgend p verschiedene Elemente haben mit wenigstens rp verschiedenen Mengen $\mathscr{A}_i$ einen nicht leeren Durchschnitt.*

Wir geben noch eine Verallgemeinerung der Sätze 3.9 und 4.2 an, den Beweis führen wir nicht aus, da er vollkommen analog zum Vorhergehenden verläuft.

Seien s_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ und r_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ ganze positive Zahlen und sei die konvexe Menge $\mathscr{M}$ der $m \times n$-Matrizen $(x_{i,k})$ definiert durch

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,k} \leqq r_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \leqq s_i$$

$$0 \leqq x_{i,k} \leqq 1 .$$

SATZ 4.6. *Für die Gültigkeit der Gleichung*

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, x_{i,k} \,\middle|\, (x_{i,k}) \in \mathscr{M} \right\} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend. Die aus Nullen und Einsen bestehende Matrix $(d_{i,k})$ hat die Eigenschaft, daß die Anzahl der im Durchschnitt der Zeilen Nr. $i_1, i_2, \ldots, i_p$ und der Spalten Nr. $k_1, k_2, \ldots, k_q$ stehenden Einsen größer oder gleich ist dem Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{p} s_{i_\nu} + \sum_{\nu=1}^{q} r_{k_\nu} - \sum_{k=1}^{n} r_k .$$

DEFINITION. Ein allgemeines Vertreter-System für die Teilmengen $\mathscr{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ der endlichen Menge $\mathscr{A}$ ist ein System von Teilmengen $\mathscr{S}_i$ mit folgenden Eigenschaften: $\mathscr{S}_i \subseteq \mathscr{A}_i$, $|\mathscr{S}_i| = s_i$ und das Element a_k kommt in höchstens r_k der Mengen $\mathscr{A}_i$ vor.

Ein allgemeines Vertretersystem wird also mit Hilfe der ganzen positiven Zahlen s_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ und r_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ definiert.

SATZ 4.7. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines allgemeinen Vertreter-Systems (welches zu den Zahlen s_i und r_k gehört) ist die folgende Bedingung:*

Wenn $\mathscr{R} = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_q}\}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathscr{A}$ ist und wenn $\mathscr{I}$ eine beliebige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, m\}$ ist, so gilt

$$\sum_{i \in \mathscr{I}} |\mathscr{A}_i \cap \mathscr{R}| \geqq \sum_{i \in \mathscr{I}} s_i + \sum_{\nu=1}^{q} r_{k_\nu} - \sum_{k=1}^{n} r_k .$$

Literatur

[1] Birkhoff, G.: Tres observationes sobre el algebra lineal. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A **6**, 147 (1941).

[2] Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin 1959.

[3] Charnes, A., and W. W. Cooper: The Minkowski-Weyl-Farkas Theorem. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. **44**, 914—916 (1958).

[4] Ford jr., L. R., and D. R. Fulkerson: Network Flow and Systems of Representatives. Canad. J. Math. **10**, 78—84 (1958).

[5] Goldman, A. J., and A. W. Tucker: Theory of Linear Programming, in [13], 53—97.

[6] Hall jr., Marshall: Theorems on Choice. In: Some Aspects of Analysis and Probability. (Surveys in Applied Mathematics IV.) New York 1958.

[7] Hall, Ph.: On Representatives of Subsets. J. London Math. Soc. **10**, 26—30 (1935).

[8] Heller, I., and C. B. Tompkins: An Extension of a Theorem of Dantzig's, in [13], 247—254.

[9] Hoffman, A. J., and J. B. Kruskal: Integral Boundary Points of Convex Polyhedrons, in [13], 223—246.

[10] Hoffman, A. J., and H. W. Kuhn: On Systems of Representatives, in [13], 199—206.

[11] Hoffman, A. J., and H. W. Kuhn: Systems of Distinct Representatives and Linear Programming. Amer. Math. Monthly **63**, 455—460 (1956).

[12] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[13] Kuhn, H. W., and A. W. Tucker (Ed.): Linear Inequalities and Related Systems. Ann. Math. Studies **38** (1956).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 1. Oktober 1960)

Schubert, H.
Math. Zeitschr. 76, 116—148 (1961)

Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen

Von
Horst Schubert

In Verallgemeinerung des Sachverhaltes für Knoten wurde von Y. Hashizume [2] gezeigt, daß jede nicht-zerfallende Verkettung in der 3-Sphäre S^3 eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren besitzt (vgl. 6.1 im folgenden). Nachdem von W. Haken [1] endliche Verfahren angegeben wurden, von einem Knoten zu entscheiden, ob er ein Kreis ist, und von einer Verkettung zu entscheiden, ob sie zerfällt, läßt sich ein endliches Verfahren angeben, das die Primfaktorzerlegung einer Verkettung herstellt.

Es wird hier zunächst das Verfahren von Haken beschrieben. Durch eine Variante des Reduktionsansatzes (3.2) ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung und außerdem die Anwendbarkeit des Verfahrens auf Flächen in nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Zur Illustration ist in § 4 die einfachste Anwendung ausgeführt, nämlich die Entscheidung, ob eine Verkettung in der S^3 zerfällt. Danach werden in § 5 Resultate von Haken verallgemeinert zu einem Bestimmungsverfahren für das Geschlecht von Knoten in beliebigen 3-dimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeiten. Schließlich wird in § 6 die Faktorzerlegung von Verkettungen in der S^3 behandelt.

Die Endlichkeit der Verfahren bedeutet nicht, daß sie praktisch ausführbar wären. Man kann aber zeigen, daß sie finit im strengen Sinne sind, d.h. daß sich die Anzahl der benötigten Schritte nach oben abschätzen läßt. Wir gehen hierauf nicht ein, weil die uns vorliegenden Abschätzungen so grob sind, daß sie keine Information über die Anzahl der tatsächlich benötigten Schritte ergeben. Außerdem haben wir darauf verzichtet, das Normalgleichungssystem in 2.4 möglichst klein zu halten, was durch Änderungen der Zellenzerlegung und durch Verschärfung des 8. Schrittes in 2.2 möglich wäre. Dies scheint unwesentlich zu sein, solange das Verfahren nicht tatsächlich ausgeführt werden soll. Wir haben uns daher für die einfachere Beschreibung entschieden.

§ 1. Vorbemerkungen zum Verfahren von Haken

1.1. Bezeichnungen. Der 3-dimensionale euklidische Raum wird stets mit R^3, die 3-Sphäre mit S^3 bezeichnet. M sei eine dreidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, die möglicherweise berandet ist. $\dot{M}$ bezeichne den Rand von M. M sei mit einer festen regulären Zellenzerlegung Σ versehen. Für die Zellen von Σ sei eine affine Struktur fixiert, so daß es Sinn hat, von geradlinigen Unterteilungen zu sprechen. Alle vorkommenden Flächen sollen sim-

plizial in einer jeweils geeigneten, geradlinigen Unterteilung von Σ sein. Unter Flächen sind (abweichend von HAKEN) stets zusammenhängende Flächen zu verstehen, andernfalls sprechen wir von Flächensystemen. Der Rand einer Fläche kann unzusammenhängend sein. $\mathfrak{F}$ sei stets eine kompakte Fläche in M, deren Rand leer ist oder auf $\dot{M}$ liegt. $\dot{\mathfrak{F}}$ bezeichne den Rand von $\mathfrak{F}$. Die Charakteristik[1]) von $\mathfrak{F}$ wird mit $\chi(\mathfrak{F})$ bezeichnet. Unter isotopen Deformationen sind stets semilineare, isotope Deformationen zu verstehen.

1.2. Überblick. Es wird sich darum handeln, Flächen zu betrachten, die für M „charakteristisch" sind. Was darunter zu verstehen ist, hängt von der jeweils vorliegenden Anwendung des Verfahrens ab. Zur Fixierung der Ideen sei C eine einfache Kurve auf $\dot{M}$, die auf M nullhomolog modulo 2 ist. Außerdem sei C Unterkomplex von $\dot{M}$ (bezüglich Σ). Es gibt dann Flächen auf M, die von C berandet werden, und unter ihnen solche von maximaler Charakteristik[1]). Diese sind die charakteristischen Flächen für das Verfahren, solche Flächen zu bestimmen (vgl. 5.5). Im allgemeinen wird unter diesen Flächen keine sein, die Unterkomplex von M ist. Man muß sich daher mit der Forderung begnügen, daß eine solche Fläche bezüglich Σ in „schöner Lage" ist. „Schöne Lage" wird in 2.3 durch den Begriff der Normalfläche präzisiert, wobei die zu Σ gehörige Normalzerlegung Σ' von M (2.1) eingeht.

Die Normalflächen sind durch ihren Verlauf in den Umgebungen der Ecken von Σ vollständig beschrieben (bis auf unwesentliche Isotopie). Hierauf beruht es, daß sie gewissen nicht-negativen ganzen Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems entsprechen (2.4). Die nicht-negativen ganzen Lösungen dieses „Normalgleichungssystems" sind nicht-negative ganze Linearkombinationen von endlich vielen Fundamentallösungen (2.5). Zu Fundamentallösungen gehörige Flächen werden als Fundamentalflächen bezeichnet.

Durch ein Normalisierungsverfahren (2.2), das über isotope Deformationen hinausgeht, werden charakteristische Flächen in Normalflächen verwandelt. Für jede Anwendung ist gesondert nachzuprüfen, daß dabei wieder charakteristische Flächen entstehen, wobei die Existenz charakteristischer Flächen hypothetisch sein kann[2]). Ferner wird nachgewiesen, daß charakteristische Fundamentalflächen vorhanden sind, wenn es charakteristische Normalflächen gibt. Dieser Nachweis hängt wieder von der jeweiligen Problemstellung ab, beruht aber auf einem allgemeinen Reduktionsansatz, der in § 3 dargestellt ist. Vermöge der Fundamentalflächen erhält man nun ein endliches Verfahren für die Bestimmung charakteristischer Flächen, wobei zugleich über die Existenz solcher Flächen entschieden wird. Dazu muß allerdings noch für jede Fundamentalfläche feststellbar sein, ob sie charakteristisch ist oder nicht, was trivial (wie in § 4 und § 5) oder Gegenstand eines anderen Verfahrens (wie in § 6) sein kann.

[1]) In Angleichung an den Gebrauch bei beliebigen Polyedern ist das Vorzeichen der Charakteristik so gewählt, daß die 2-Sphäre die Charakteristik $+2$, also größte Charakteristik hat.

[2]) Dies ist beispielsweise der Fall, wenn man oben für die Kurve C nicht voraussetzt, daß sie auf M nullhomolog modulo 2 ist.

§ 2. Normalflächen

2.1. Normalzerlegung. Zur Zellenzerlegung Σ von M wird eine zugehörige Normalzerlegung Σ' hergestellt und zwar derart, daß jeder Zelle von Σ (der Dimension 0, 1, 2, 3) eine 3-Zelle von Σ' zugeordnet ist (Fig. 1). Zunächst werden die Ecken von Σ mit paarweise disjunkten *Kugel*umgebungen (P-Raumstücke)[3]) versehen, danach werden die Kantenstücke von Σ außerhalb der eben gewählten Kugeln mit paarweise disjunkten *Balken*umgebungen (K-Raumstücke)[3]) versehen. Zur Veranschaulichung merken wir an, daß das jetzt vorhandene Kugel- und Balkensystem auf ein Heegard-Diagramm von M führt. Nunmehr werden die Stücke der 2-Zellen von Σ außerhalb des

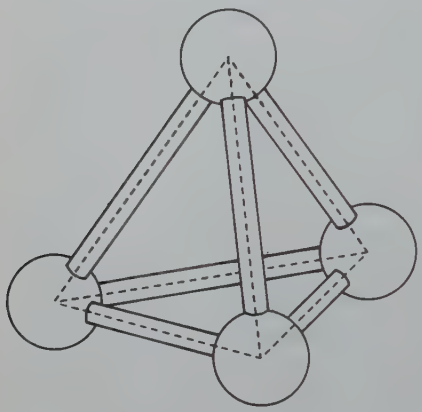

Fig. 1

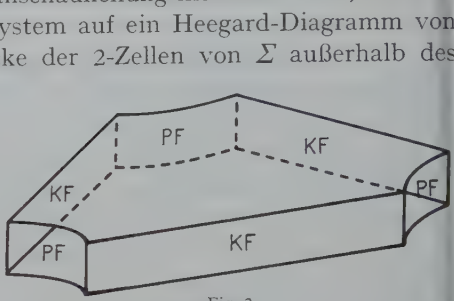

Fig. 2

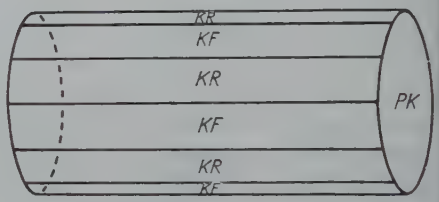

Fig. 3

Kugel- und Balkensystems mit paarweise disjunkten *Platten*umgebungen (F-Raumstücke)[3]) versehen. (Diese Platten sind in Fig. 1 nicht mitgezeichnet.) Es verbleiben noch *Restraumstücke* (R-Raumstücke)[3]) im Innern der 3-Zellen von Σ. Damit sind die 3-Zellen von Σ' beschrieben. Sie sollen natürlich „schöne" Umgebungen[4]) der entsprechenden Zellenteile von Σ sein, etwa simpliziale Umgebungen in genügend feinen simplizialen Unterteilungen von Σ.

Σ' ist durch Σ bis auf Isomorphie bestimmt; das Schema von Σ' kann aus dem Schema von Σ abgelesen werden.

Außer den 3-Zellen werden immer wieder die 2-Zellen von Σ' benötigt. Wir beschreiben daher ihre gegenseitige Lage auf den Rändern der 3-Zellen, wobei wir von den später nicht weiter benötigten Restraumstücken absehen.

Auf dem *Rande einer Platte* (Fig. 2) liegen Elementarflächenstücke, in denen Kugeln und Balken an die Platte anstoßen (PF und KF in Fig. 2). Diese Flächenstücke setzen sich zu einem Kreisring zusammen, auf dem Kugel- und Balkenanstöße abwechseln. In den beiden restlichen Elementarflächenstücken (Boden und Dach der Platte) stoßen entweder zwei Restraumstücke

[3]) Bezeichnung bei HAKEN [1].

[4]) Auf Einzelheiten dieser Art gehen wir hier und im folgenden nicht ein. Sie sind bei HAKEN ausführlich dargestellt.

n, oder es liegt eines von beiden auf $\dot{M}$, während am anderen ein Restraum-tück anstößt.

Auf dem *Rande eines Balkens* (Fig. 3) liegen zwei Flächenstücke, in denen Kugeln anstoßen (*PK* in Fig. 3). Der dazwischen liegende Kreisring ist in Streifen zerlegt, in denen abwechselnd Platten und Restraumstücke anstoßen (*KF* und *KR* in Fig. 3). Höchstens ein Streifen kann auf $\dot{M}$ liegen; er liegt dann zwischen zwei Streifen, in denen Platten anstoßen (statt eines mit *KR* bezeichneten).

Auf dem *Rande einer Kugel* (Fig. 4) liegen als „Inseln" Flächenstücke, in denen Balken anstoßen (*PK* in Fig. 4). Diese Inseln sind verbunden durch „Brücken" (*PF*), in denen Platten anstoßen. Es verbleiben „Seen" (*PR*), in denen Restraumstücke anstoßen. Es kann auch sein, daß ein See auf $\dot{M}$ liegt, wir sprechen dann von einem „Randsee".

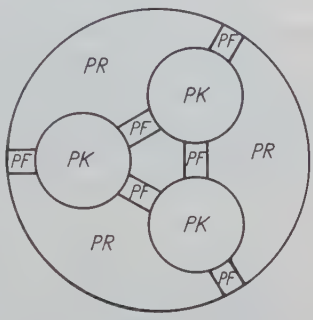

Fig. 4

Je nach Art der zusammenstoßenden 3-Zellen können die 2-Zellen von Σ' als *PK*-, *PF*-, *PR*-, *KF*-, *KR*-, *FR*-Flächenstücke bezeichnet werden (wie dies in den Figuren geschehen ist) bzw. als $P\dot{M}$-, $K\dot{M}$-, $F\dot{M}$-Flächenstücke, wenn sie auf $\dot{M}$ liegen. Beispielsweise sind Inseln *PK*-Flächenstücke, Randseen $P\dot{M}$-Flächenstücke.

2.2. Normalisieren charakteristischer Flächen. Es sei $\mathfrak{F}$ eine für M charakteristische Fläche. (Die Definition dieser Flächen hängt von der jeweiligen Anwendung ab.) Der Rand $\dot{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{F}$ liege auf $\dot{M}$. Er kann leer sein. $\mathfrak{F}$ soll durch eine Fläche ersetzt werden, die bezüglich Σ' in übersichtlicher Lage ist. Dies wird durch isotope Deformation und zwei Zerschneidungsoperationen (7. und 8. Schritt) erreicht. Dabei nehmen wir an, daß die Definition der charakteristischen Flächen so beschaffen ist, daß isotope semilineare Deformationen erlaubt sind und daß keine Komponente von $\dot{\mathfrak{F}}$ ein Elementarflächenstück auf $\dot{M}$ berandet, was in den Anwendungen stets der Fall sein wird.

1. Schritt. Durch isotope Deformation von $\mathfrak{F}$ bei festem Rand $\dot{\mathfrak{F}}$ wird erreicht, daß $\dot{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \cap \dot{M}$ ist. Der übrige Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ und $\dot{M}$ wird von $\dot{M}$ abgehoben[5]).

2. Schritt. $\mathfrak{F}$ wird durch eine Isotopie bei festem Rand aus allen Restraumstücken ausgefegt.

3. Schritt. $\dot{\mathfrak{F}}$ wird auf $\dot{M}$ isotop aus denjenigen Flächenstücken ($F\dot{M}$) herausdeformiert, in denen Platten anstoßen. Diese Isotopie von $\dot{\mathfrak{F}}$ wird zu einer Isotopie von $\mathfrak{F}$ so fortgesetzt, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit den Restraumstücken leer bleibt.

[5]) Die Einzelheiten hierfür und für die folgenden Schritte findet man in [5] und [6].

4. Schritt. $\mathfrak{F}$ wird durch eine Isotopie bei festem Rand in den Platte „straffgezogen", so daß $\mathfrak{F}$ in den Platten Elementarflächenstücke bildet, d „parallel" zu Boden und Dach liegen (Fig. 5, vgl. Fig. 2). Der Rand ein solchen Flächenstückes bildet je einen Querschnitt auf den PF- und K Flächenstücken im Rande der Platt Das Straffziehen von $\mathfrak{F}$ in ein Platte $\mathfrak{P}$ erfolgt so, daß eine geeigne „senkrechte Säule" in $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}$ au geblasen wird. $\mathfrak{F}$ wird also zum Te aus $\mathfrak{P}$ in die anstoßenden Kugel und Balken verdrängt. Der Durch schnitt von $\mathfrak{F}$ mit den Restraum stücken bleibt dabei leer.

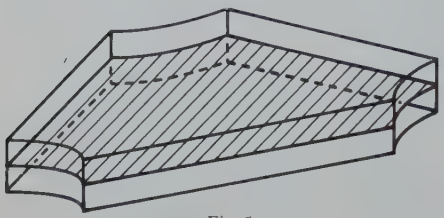

Fig. 5

5. Schritt. $\dot{\mathfrak{F}}$ wird auf $\dot{M}$ straffgezogen. Es kann sein (Fig. 6), daß auf den Flächenstücken von $\dot{M}$, in denen Kugeln ($P\dot{M}$) und Balken ($K\dot{M}$ anstoßen, „Schleifen" bildet, indem ein Bogen von $\dot{\mathfrak{F}}$ auf einem $P\dot{M}$-Flächen stück ein anstoßendes $K\dot{M}$-Flächenstück mit sich selbst verbindet oder inde ein Bogen von $\dot{\mathfrak{F}}$ auf einem $K\dot{M}$-Flächenstück ei anstoßendes $P\dot{M}$-Flächenstück mit sich selbst ve bindet. Solche Schleifen von $\dot{\mathfrak{F}}$ können der Reih nach durch isotope Deformation von $\dot{\mathfrak{F}}$ beseitig werden, so daß danach $\dot{\mathfrak{F}}$ auf den $P\dot{M}$- und $K\dot{M}$ Flächenstücken Querschnitte bildet, diejeweils ve schiedene anstoßende Flächenstücke verbinden[6] Die Deformation von $\dot{\mathfrak{F}}$ wird so zu einer isotope Deformation von $\mathfrak{F}$ fortgesetzt, daß sich am Durch schnitt von $\mathfrak{F}$ mit den Restraumstücken und Platte nichts ändert.

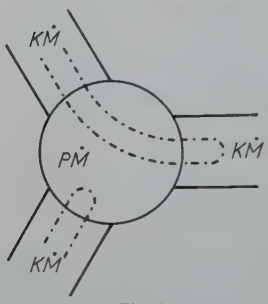

Fig. 6

6. Schritt. $\mathfrak{F}$ wird bei festem Rand in den Balken straffgezogen durc eine Isotopie, die am Verlauf von $\mathfrak{F}$ in den Platten nichts ändert. Dies g schieht so, daß Teile von $\mathfrak{F}$ aus de Balken in die anstoßenden Kugeln ve drängt werden, so daß $\mathfrak{F}$ danach i den Balken Bänder und vielleicht auc Zylinder bildet, die in Balkenrichtun verlaufen (Fig. 7, vgl. Fig. 3). Wege des 5. Schrittes ist das Straffziehe auch in denjenigen Balken möglich, d an $\dot{M}$ anstoßen.

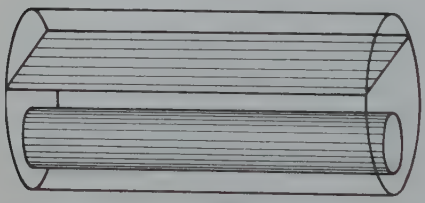

Fig. 7

7. Schritt. Vereinfachung in den Kugeln. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel von $\mathfrak{X}$ (P-Raumstück) und $\dot{\mathfrak{K}}$ ihr Rand. Falls $\dot{\mathfrak{K}}$ an $\dot{M}$ anstößt, sind die Bögen v

[6]) Wir erinnern daran, daß keine Komponente von $\dot{\mathfrak{F}}$ ein Elementarflächenstück a $\dot{M}$ berandet.

$\dot{\mathfrak{F}}$ auf $\dot{\mathfrak{R}}$ zu den Schnitten von $\dot{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{F}$ zu rechnen. Unter dieser Vereinbarung besteht der Durchschnitt von $\dot{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{F}$ aus einfachen geschlossenen, paarweise disjunkten Schnittlinien.

Wir betrachten den Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$. Besteht er aus Elementarflächenstücken, so hat $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{R}$ die gewünschte Gestalt. Ist dies nicht der Fall, so gibt es Schnittlinien von $\dot{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{F}$, die nicht Ränder von Elementarflächenstücken auf $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{F}$ sind. Unter diesen Schnittlinien gibt es eine auf $\dot{\mathfrak{R}}$ innerste. Sie heiße s. Sie berandet auf $\dot{\mathfrak{R}}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{c}$ derart, daß die weiteren Schnitte von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{F}$ Ränder von Elementarflächenstücken in $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{F}$ sind. Vermöge $\mathfrak{c}$ erkennt man, daß es in $\mathfrak{R}$ ein von s berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ gibt, für welches $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{g} \cap \dot{\mathfrak{R}} = s$ ist. Wir schneiden $\mathfrak{F}$ längs s auf. In die beiden entstehenden Ränder fügen wir zwei Exemplare von $\mathfrak{g}$ ein und heben diese voneinander ab. (Fig. 8 zeigt den Sachverhalt schematisch im Schnitt.) Das Abheben werde ins Innere von $\mathfrak{R}$ vorgenommen, so daß sich $\mathfrak{F}$ außerhalb $\mathfrak{R}$ nicht ändert.

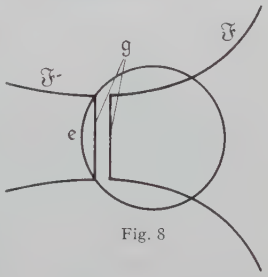

Fig. 8

Zerfällt $\mathfrak{F}$ bei dieser Operation (ξ-Operation bei Haken) nicht, so ist nachzuprüfen, ob $\mathfrak{F}$ weiterhin charakteristisch ist. Ist dies nicht mehr der Fall, so ist die Normalisierung gescheitert. Zerfällt $\mathfrak{F}$, so ist entweder eine der beiden entstehenden Flächen charakteristisch, so daß sie an die Stelle von $\mathfrak{F}$ treten kann, oder es scheitert die Normalisierung. Wir merken an: Tritt kein Zerfall ein, so erhöht sich $\chi(\mathfrak{F})$ um 2, tritt Zerfall ein, so ist die Charakteristik der neuen Fläche nicht kleiner als diejenige der alten.

Beispiel 1. Charakteristische Flächen seien 2-Sphären, die M nicht zerlegen. Durch die Operation zerfällt $\mathfrak{F}$ in zwei 2-Sphären, wovon mindestens eine charakteristisch ist. Durch eine solche ist $\mathfrak{F}$ zu ersetzen.

Beispiel 2. M möge durch jede 2-Sphäre zerlegt werden. $\dot{M}$ sei nicht zusammenhängend. Charakteristische Flächen seien 2-Sphären, die M so zerlegen, daß jeder der beiden Teile mindestens eine Komponente von $\dot{M}$ enthält. Bei der Operation zerfällt $\mathfrak{F}$ in zwei 2-Sphären, wovon mindestens eine charakteristisch ist. Zu einer solchen ist überzugehen.

Beispiel 3. C sei eine einfache geschlossene Kurve auf $\dot{M}$, die Unterkomplex von $\dot{M}$ bezüglich Σ ist und die auf $\dot{M}$ kein Elementarflächenstück berandet. Charakteristisch seien diejenigen von C berandeten, orientierbaren Flächen, die unter allen orientierbaren Flächen mit Rand C von maximaler Charakteristik sind. Bei der Operation zerfällt $\mathfrak{F}$ in eine 2-Sphäre und eine charakteristische Fläche, die an Stelle von $\mathfrak{F}$ tritt. Wegen der Gestalt von C waren hier übrigens der 3. und 5. Schritt gegenstandslos (vgl. die Anmerkung am Ende dieses Abschnitts 2.2).

Wir nehmen weiterhin an, daß die Normalisierung nicht scheitert, so daß durch Wiederholung der Operation erreicht wird, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit allen Kugeln von Σ' aus Elementarflächenstücken besteht.

Waren nach dem 6. Schritt zylindrische Stücke von $\mathfrak{F}$ in den Balken vo handen, so sind diese jetzt verschwunden, wenn nicht $\mathfrak{F}$ aus einem solche zylindrischen Stück in einem Balken und zwei Elementarflächenstücken i den anstoßenden Kugeln besteht. Solche trivialen 2-Sphären werden jedoc unter den charakteristischen Flächen nie vorkommen.

8. Schritt. Weitere Vereinfachung von $\dot{\mathfrak{F}}$. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel von Σ die an $\dot{M}$ anstößt (Fig. 9). Auf ihrem Rande $\dot{\mathfrak{K}}$ liegt ein Randsee r, der de Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und $\dot{M}$ ausmacht ($P\dot{M}$). i sei eine an r anstoßende Ins (PK) auf $\dot{\mathfrak{K}}$. Es kann sein, daß eine Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ mit $\dot{\mathfrak{K}}$ auf i eine Schlei bildet, die r mit sich selbst verbindet. Solche Schleifen sollen beseitigt werde

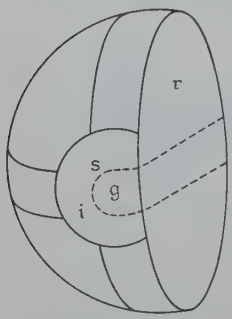

Fig. 9

In ihrer Umgebung hat $\mathfrak{F}$ tunnelartige Gestalt zu M hin. Sind Schleifen dieser Art auf i vorhanden, so gib es unter ihnen eine innerste, die s heiße. s schneide von i nach r hin ein Elementarflächenstück g ab, da von weiteren Schnitten mit $\mathfrak{F}$ frei ist. Wir schneide $\mathfrak{F}$ längs s auf, fügen g doppelt ein und heben di beiden Exemplare von g nach beiden Seiten von i s ab, daß s aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ und i ver schwindet und keine neuen Schnitte entstehen (Rand ξ-Operation). Danach bildet $\dot{\mathfrak{F}}$ eine Schleife auf der $K\dot{M}$-Flächenstück, das den Durchschnitt von $\dot{M}$ mi dem in i anstoßenden Balken ausmacht, und möglicher weise auch eine Schleife auf r.

Zerfällt $\mathfrak{F}$ bei dieser Operation nicht, so ist nachzuprüfen, ob $\mathfrak{F}$ weiterhi charakteristisch ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Normalisierung ge scheitert. Zerfällt $\mathfrak{F}$, so ist entweder eine der entstehenden Flächen charak teristisch, so daß sie an Stelle von $\mathfrak{F}$ treten kann, oder es scheitert die Nor malisierung. Zerfällt $\mathfrak{F}$ nicht, so erhöht sich $\chi(\mathfrak{F})$ um 1. Zerfällt $\mathfrak{F}$, so is die Charakteristik der neuen Fläche nicht kleiner als diejenige der alten Ein Beispiel wird sich in § 5 ergeben.

Wir nehmen weiterhin an, daß die Normalisierung nicht scheitert, so da durch Wiederholung der Operation erreicht wird, daß Schleifen der betrach teten Art auf den Inseln nicht mehr vorhanden sind. Das Normalisierungs verfahren ist hierauf vom 5. Schritt an zu wiederholen, und zwar so oft wi nötig. Dies kann nur endlich viele Male geschehen, da sich $\dot{\mathfrak{F}}$ zunehmen vereinfacht. Die Anzahl der Querschnitte, die $\dot{\mathfrak{F}}$ auf den zu Σ' gehörige Flächenstücken von $\dot{M}$ bildet, nimmt ab.

9. Schritt. Beseitigung von Falten. Es sei $\mathfrak{K}$ wieder eine Kugel von Σ mit dem Rande $\dot{\mathfrak{K}}$. s sei eine Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ und $\dot{\mathfrak{K}}$. s läuft auf $\dot{\mathfrak{K}}$ übe Inseln und Brücken, möglicherweise auch über den Randsee von $\dot{\mathfrak{K}}$, fall $\mathfrak{K}$ an $\dot{M}$ anstößt. Wegen des 4. Schrittes bildet s auf den Brücken Schnitte die verschiedene anstoßende Inseln verbinden (vgl. Fig. 5 sowie Fig. 2 und PF). Nehmen wir nun an, daß s mehr als einmal über dieselbe Brücke

führt. Es gibt dann auf $\mathfrak{b}$ ein innerstes Paar von Bögen auf s, etwa s_1 und s_2. Sie schneiden aus $\mathfrak{b}$ einen Streifen $\mathfrak{s}$ aus, der keinen weiteren Bogen von s enthält (Fig. 10). Da $\dot{\mathfrak{K}}$ von s in zwei Elementarflächenstücke zerlegt wird, können Bögen auf $\mathfrak{s}$, die von anderen Schnittlinien herrühren, nur in Paaren auftreten. Es kann daher angenommen werden, daß auf $\mathfrak{s}$ keine weiteren Schnittbögen von $\mathfrak{F}$ mit $\dot{\mathfrak{K}}$ liegen, weil man sonst statt s eine andere Schnittlinie betrachten könnte.

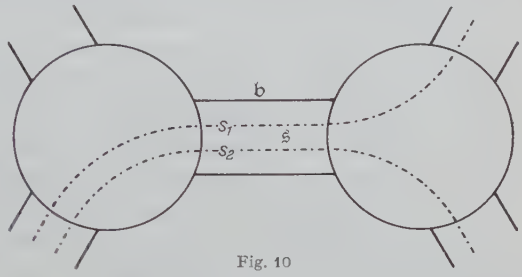

Fig. 10

An die Brücke $\mathfrak{b}$ stößt eine Platte $\mathfrak{P}$ an. In dieser Platte $\mathfrak{P}$ liegen zwei Stücke $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ von $\mathfrak{F}$, die in s_1 und s_2 an $\mathfrak{K}$ anstoßen (Fig. 11, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ sind nicht mitgezeichnet). Wegen des 7. Schrittes berandet s auf $\mathfrak{F}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$, das in $\mathfrak{K}$ liegt. $\mathfrak{e}$ verbindet $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ griffartig; $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{e}$ bilden eine „Falte" von $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{K}$ läßt sich durch ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{e}$ her nach $\mathfrak{b}$ hin aufschlitzen, wobei $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{F}$ nur einen auf $\mathfrak{e}$ liegenden Randbogen gemein hat. Man kann daher $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{P}$ hinein einbeulen und danach (vgl. 4. Schritt) $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$ verdrängen, während sich an dem sonstigen Verlauf von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{P}$ und den übrigen Platten nichts ändert. Auch an $\dot{\mathfrak{F}}$ ändert sich nichts.

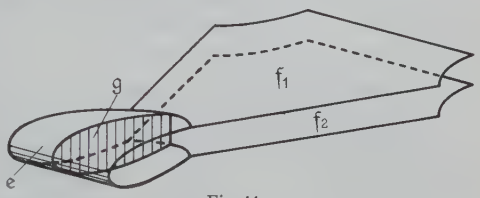

Fig. 11

Das Normalisierungsverfahren ist nun vom 6. Schritt an zu wiederholen, und zwar so lange, bis dieser 9. Schritt gegenstandslos wird, also keine Schnittlinie von $\mathfrak{F}$ mit einem Kugelrande zweimal über dieselbe Brücke führt. Da jedesmal die Anzahl der Stücke von $\mathfrak{F}$, die in den Platten liegen, um 2 abnimmt, sind nur endlich viele Wiederholungen möglich. Danach sind für die Schnittlinien von $\mathfrak{F}$ mit den Kugelrändern auch keine Schleifen auf den Inseln zu Brücken hin vorhanden.

Das Normalisierungsverfahren ist dann beendet und die gewünschte Gestalt von $\mathfrak{F}$ erreicht.

Anmerkung. Ist $\dot{\mathfrak{F}}$ fest vorgegeben, so sind der 3., 5. und 8. Schritt nicht erlaubt. Diese Schritte sind jedoch gegenstandslos, wenn $\dot{\mathfrak{F}}$ als Unterkomplex von $\dot{M}$ bezüglich der ursprünglichen Zellenzerlegung Σ gegeben ist. $\dot{\mathfrak{F}}$ meidet dann die Randseen (3. Schritt) und bildet auf jedem anderen Flächenstück von $\dot{M}$ bezüglich Σ' höchstens einen Querschnitt. Daher können weder Schleifen von $\dot{\mathfrak{F}}$ (5. Schritt) noch Schleifen nach Art der Fig. 9 (8. Schritt) vorhanden sein.

Es bedeutet übrigens keine Einschränkung der Allgemeinheit, bei fes vorgegebenem $\dot{\mathfrak{F}}$ anzunehmen, daß $\dot{\mathfrak{F}}$ Unterkomplex von $\dot{M}$ bezüglich Σ ist Ist dies noch nicht der Fall, so ist Σ durch eine geeignete (explizit anzugebende Unterteilung zu ersetzen.

2.3. Normalflächen. Es sei jetzt $\mathfrak{F}$ eine beliebige Fläche auf M, deren Rand $\dot{\mathfrak{F}}$ auf $\dot{M}$ liegt. $\mathfrak{F}$ heißt Normalfläche (bezüglich Σ'), wenn die Schritte des vorangehenden Normalisierungsverfahrens für $\mathfrak{F}$ gegenstandslos sind. Eine Normalfläche $\mathfrak{F}$ meidet also die Restraumstücke, bildet in den Platten Flächenstücke, die „parallel" zu Boden und Dach sind, in den Balken Bänder in Balkenrichtung und in den Kugeln Elementarflächenstücke. Außerdem bilden die Schnittlinien von $\mathfrak{F}$ mit den Kugelrändern keine Schleifen auf Inseln oder Randseen, und keine Schnittlinie läuft zweimal über dieselbe Brücke.

Zwei *Normalflächen* werden als *nicht wesentlich verschieden* (ähnlich) betrachtet, wenn sie isotop sind bezüglich einer Isotopie, bei der kein Punkt die offene Zelle von Σ' (der Dimension 1, 2, 3) verläßt, der er anfangs angehört. Eine solche *Isotopie* wird auch als *unwesentlich* bezeichnet.

Eine Normalfläche $\mathfrak{F}$ ist durch ihre Schnitte mit den Kugelrändern bis auf unwesentliche Isotopie bestimmt. Diese Schnitte legen bereits fest, wie $\mathfrak{F}$ in den Kugeln, Balken und Platten zu verlaufen hat. Natürlich lassen sich diese Schnitte nicht willkürlich vorgeben, sie müssen Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, wenn sie zu einer Normalfläche oder zu einem System solcher Flächen gehören sollen. Hierauf gehen wir jetzt ein.

2.4. Normalgleichungen. Sei zunächst $\mathfrak{K}$ eine Kugel von Σ', die nicht an $\dot{M}$ anstößt, und $\dot{\mathfrak{K}}$ ihr Rand. Wir betrachten auf $\dot{\mathfrak{K}}$ Kurven, die als Schnittlinien von $\dot{\mathfrak{K}}$ mit Normalflächen in Frage kommen, also einfache geschlossene Kurven, welche Brücken und Inseln überqueren, die Seen meiden und keine Brücke zweimal überkreuzen. „Überqueren" soll besagen, daß keine Schleifen vorhanden sind und daß die Kurve nicht auf einer einzigen Insel oder Brücke liegt. Bezüglich unwesentlicher Isotopie gibt es nur endlich viele Klassen solcher Kurven. Wir bezeichnen diese Klassen als *Schnitt-Typen* auf $\dot{\mathfrak{K}}$. Sei nun $\mathfrak{K}$ eine Kugel, die an $\dot{M}$ anstößt. $\dot{\mathfrak{K}}$ sei wieder der Rand von $\mathfrak{K}$. Auf $\dot{\mathfrak{K}}$ liegt ein Randsee, der den Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und $\dot{M}$ ausmacht. Die entsprechenden Kurven können jetzt außer Inseln und Brücken auch den Randsee überqueren, wobei zwischen je zwei Überquerungen des Randsees mindestens eine Brückenüberquerung liegt. Daher gibt es auch jetzt nur endlich viele *Schnitt-Typen* auf $\dot{\mathfrak{K}}$.

Weil M kompakt ist, gibt es für alle Kugelränder insgesamt nur endlich viele Schnitt-Typen. Sie werden auf irgendeine, aber weiterhin feste Weise numeriert und mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ bezeichnet. Die Schnitt-Typen lassen sich aus dem Schema von Σ' bestimmen.

Will man zwei oder mehrere Schnitt-Typen, die zum selben Kugelrand gehören, durch repräsentierende Kurven darstellen, so kann es sein, daß sich Kreuzungen der Repräsentanten nicht vermeiden lassen. Ein Teilsystem de

Systems aller Schnitt-Typen heißt *realisierbar* (verträglich), wenn es durch paarweise disjunkte Kurven auf den Kugelrändern dargestellt werden kann. Unter einer *Realisierung* ist stets eine solche Darstellung zu verstehen. Von einem vorgegebenen Teilsystem der Schnitt-Typen ist finit entscheidbar, ob es realisierbar ist oder nicht. Man erkennt dies, wenn man für jeden Kugelrand die darzustellenden Schnitt-Typen der Reihe nach zu realisieren versucht und jeweils die Zerlegung des Kugelrandes durch die bereits vorhandenen Kurven berücksichtigt. Wird jedem Schnitt-Typ $\mathfrak{P}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ eine nicht-negative, ganze Vielfachheit x_i zugeordnet, so sagen wir, daß ein *Schnittschema* $\mathfrak{x}=\{x_i\}$ vorliegt (*P*-Zahlensystem). Eine *Realisierung* von $\mathfrak{x}$ besteht aus paarweise disjunkten Kurven auf den Kugelrändern, so daß jeweils x_i Kurven vom Typ $\mathfrak{P}_i$ sind. Man erkennt leicht, daß $\mathfrak{x}$ genau dann realisierbar ist, wenn es das System derjenigen Schnitt-Typen ist, die in $\mathfrak{x}$ eine positive Vielfachheit besitzen.

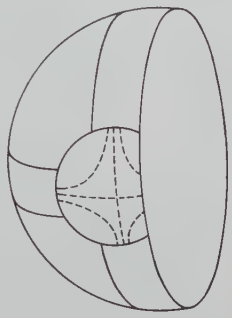

Fig. 12

Eine Normalfläche $\mathfrak{F}$ bestimmt ein realisierbares Schnittschema. Die Umkehrung gilt nicht; der Verlauf von $\mathfrak{F}$ in den Balken gibt eine weitere Bedingung. Dazu betrachten wir auf den Inseln Querschnitte, die verschiedene anstoßende Brücken verbinden, und für die Inseln, die an Randseen anstoßen, auch solche Querschnitte, die von diesem Randsee zu einer Brücke führen (Fig. 12, Querschnitte gestrichelt). Bezüglich unwesentlicher Isotopie gibt es insgesamt nur endlich viele Klassen solcher Querschnitte. Diese Klassen mögen *Bogentypen* heißen. Sie seien weiterhin mit einer festen Numerierung versehen und mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ bezeichnet.

Sei s eine Kurve auf einem Kugelrande, die einen Schnitt-Typ $\mathfrak{P}_i$ darstellt. s bildet auf den Inseln Querschnitte, die Bogentypen darstellen, wobei keine zwei solchen Querschnitte vom gleichen Bogentyp sind. Von den Bogentypen, die vermöge s erhalten werden, sagen wir, daß sie im Schnitt-Typ $\mathfrak{P}_i$ vorhanden sind. Sei

$$(1) \qquad a_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Bogentyp } \mathfrak{K}_j \text{ im Schnitt-Typ } \mathfrak{P}_i \text{ vorhanden ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vermöge der Balken ergibt sich eine paarweise Zuordnung von Bogentypen. Diese Zuordnung entsteht, anschaulich gesprochen, durch „Translation in Balkenrichtung" (Fig. 13). Seien i_1 und i_2 die beiden Inseln an den Enden eines Balkens $\mathfrak{B}$. b_1 bzw. b_2 sei ein Querschnitt auf i_1 bzw. i_2. b_1 stelle den Bogentyp $\mathfrak{K}_j$, b_2 den Bogentyp $\mathfrak{K}_h$ dar. $\mathfrak{K}_j$ und $\mathfrak{K}_h$ heißen *gekoppelt*, wenn sich die Endpunkte von b_1 und b_2 auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ durch zwei Querschnitte auf Streifen verbinden lassen, in denen Platten bzw. $\dot{M}$ an $\mathfrak{B}$

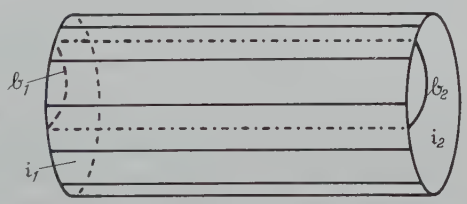

Fig. 13

anstoßen, wenn also b_1 und b_2 zum Rande eines Bandes gehören, das au einer Normalfläche liegen kann. Sei

$$(2) \qquad b_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Bogentypen } \mathfrak{K}_j \text{ und } \mathfrak{K}_h \text{ gekoppelt sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist nun $\mathfrak{x} = \{x_i\}$ das Schnittschema einer Normalfläche $\mathfrak{F}$, so schneidet die Inseln in $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$ Querschnitten vom Bogentyp $\mathfrak{K}_j$. Aus dem Verlau von $\mathfrak{F}$ in den Balken folgt $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{hi} x_i$ für gekoppelte Bogentypen $\mathfrak{K}_j$ $\mathfrak{K}_h$, also für $b_{jh} = 1$. Es gilt also

$$(3) \qquad b_{jh} \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} - a_{hi}) x_i = 0 \qquad j, h = 1, 2, \ldots, m.$$

Die Zahlen a_{ji}, b_{jh} sind durch das Schema von Σ' bestimmt. (3) heiß das zu Σ' gehörige *Normalgleichungssystem*. Eine nicht-negative, ganze Lösun von (3) heiße *realisierbar*, wenn sie ein realisierbares Schnittschema ist. Hier nach gehört zu einer Normalfläche und allgemeiner zu einem System vo (paarweise disjunkten) Normalflächen eine realisierbare Lösung von (3). Is umgekehrt $\mathfrak{x}$ eine realisierbare Lösung von (3), so ist $\mathfrak{x}$ das Schnittschem eines Normalflächensystems $\mathfrak{F}$, und es ist $\mathfrak{F}$ bis auf unwesentliche Isotopi eindeutig bestimmt. Man kann nämlich zunächst die Schnitte von $\mathfrak{F}$ m den Kugelrändern angeben und in diese Schnitte paarweise disjunkte Ele mentarflächenstücke innerhalb der Kugeln einspannen, weil $\mathfrak{x}$ realisierbar is Danach lassen sich die Bänder anfügen, die $\mathfrak{F}$ in den Balken bildet. Da $\mathfrak{x}$ Lösung von (3) ist, besagt nämlich, daß für jeden Balken die an beide Enden vorhandenen Bogensysteme auseinander durch „Translation in Balken richtung" entstehen. Der bisher aufgebaute Teil von $\mathfrak{F}$ wird berandet vo einfachen geschlossenen, paarweise disjunkten Kurven auf $\dot{M}$ und den Platten rändern, wobei keine Kurve über Boden oder Dach einer Platte führt. Daher kann $\mathfrak{F}$ noch in den Platten ergänzt werden. Aus dem Aufbau geht hervo daß $\mathfrak{F}$ aus (paarweise disjunkten) Normalflächen besteht, und dieser Aufba ist bis auf unwesentliche Isotopie der einzig mögliche.

Die realisierbaren Lösungen von (3) entsprechen also umkehrbar eindeut den Klassen, welche die Normalflächensysteme bezüglich unwesentliche Isotopie bilden.

Anmerkung. Sind die für M charakteristischen Flächen geschlossen, s kann man sich auf geschlossene Normalflächen beschränken und das Gle chungssystem (3) dadurch verkürzen, daß man alle Schnitt-Typen wegläß die Randseen kreuzen. Ist der Rand charakteristischer Flächen als Unte komplex von $\dot{M}$ bezüglich Σ vorgegeben, so kann man sich auf Normalfläche beschränken, deren Randkomponenten zu Komponenten des vorgegebene Randes unwesentlich isotop sind, womit sich (3) ebenfalls reduzieren läß

2.5. Fundamentalflächen. Nennen wir eine Lösung von (3) zulässig, wenn sie ganz, nicht-negativ und nicht-trivial ist. Eine Linearkombination zulässiger Lösungen heiße zulässig, wenn ihre Koeffizienten ganz, nicht-negativ und nicht sämtlich null sind. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, endliches System Ξ zulässiger Lösungen von (3) derart, daß jede zulässige Lösung von (3) eine zulässige Linearkombination von Lösungen aus Ξ ist und daß keine Lösung aus Ξ Summe zweier zulässiger Lösungen ist. Die zu Ξ gehörigen Lösungen mögen *Fundamentallösungen* von (3) heißen.

Zur Bestimmung von Ξ bemerken wir zunächst, daß durch (3) und $x_i \geqq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ein konvexer Kegel K im R^n definiert wird. Der Durchschnitt von K mit der Hyperebene $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ist ein kompakter konvexer Bereich B. Die Ecken von B sind rational (Punkte mit rationalen Koordinaten). Die rationalen Punkte aus B sind Linearkombinationen der Ecken von B mit nicht-negativen, rationalen Koeffizienten, wobei sich jede Ecke nur auf eine Weise, nämlich durch sich selbst, darstellen läßt. Die rationalen Punkte von K sind rationale Vielfache von rationalen Punkten aus B und daher nicht-negative, rationale Linearkombinationen der Ecken von B, wobei sich die Punkte auf einer Kante von K nur als Vielfache der entsprechenden Ecke von B darstellen lassen.

Für eine zulässige Lösung $\mathfrak{x} = \{x_i\}$ von (3) sei nun $|\mathfrak{x}| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ die Norm. Auf jeder Kante von K liegt eine zulässige Lösung kleinster Norm. Sie muß jedenfalls zu Ξ gehören. Seien $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_t$ die so durch die Kanten von K bestimmten Lösungen aus Ξ. Jede zulässige Lösung $\mathfrak{x}$ von (3) ist eine Linearkombination dieser Lösungen mit nicht-negativen, rationalen Koeffizienten. Ist dabei $|\mathfrak{x}| > \sum_{\tau=1}^{t} |\mathfrak{x}_\tau|$, so ist wegen der Linearität der Norm mindestens ein Koeffizient größer als 1, etwa derjenige von $\mathfrak{x}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq t)$. Dann ist $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_\varrho$ eine zulässige Lösung von (3), und wegen $\mathfrak{x} = (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_\varrho) + \mathfrak{x}_\varrho$ gehört $\mathfrak{x}$ sicher nicht zu Ξ. Zu $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_t$ nehme man nun zunächst alle zulässigen Lösungen von (3) hinzu, deren Norm nicht größer als $\sum_{\tau=1}^{t} |\mathfrak{x}_\tau|$ ist, und lasse danach alle diejenigen wieder weg, die Summen oder echte Vielfache von anderen sind. Damit erhält man Ξ.

Zu einer realisierbaren Fundamentallösung $\mathfrak{x}$ von (3) gehört eine Normalfläche $\mathfrak{F}$. Bestände nämlich $\mathfrak{F}$ aus mehreren Flächen, so wäre $\mathfrak{x}$ die Summe der Schnittschemata dieser Flächen, also nicht fundamental. Die zu den realisierbaren Fundamentallösungen von (3) gehörigen Normalflächen mögen *Fundamentalflächen* heißen.

2.6. Reduktion. Fassen wir zunächst zusammen: Aus der vorgegebenen Zellenzerlegung Σ der Mannigfaltigkeit M kann die zugehörige Normalzerlegung Σ' hergestellt werden und damit auch das Normalgleichungssystem

(3). Die Fundamentallösungen von (3) lassen sich berechnen, und ihre Realisierbarkeit ist auf endliche Weise entscheidbar. Zu jeder realisierbaren Fundamentallösung läßt sich eine Fundamentalfläche herstellen. Damit wird ein Vorrat von endlich vielen Flächen auf endliche Weise aufgewiesen. Einen solchen Vorrat wollen wir *repräsentativ* nennen.

Es wird sich nun darum handeln, die Frage nach charakteristischen Flächen auf die Untersuchung eines repräsentativen Vorrats von Fundamentalflächen zu reduzieren.

Dabei ist zunächst eine Bemerkung über den Rand der charakteristischen Flächen erforderlich. Es kann sein, daß dieser Rand ein Kurvensystem C auf $\dot{M}$ ist, das als Unterkomplex von $\dot{M}$ bezüglich Σ fest vorgegeben ist. In diesem Falle vereinbaren wir, daß ein repräsentativer Vorrat von Fundamentalflächen noch folgender Bedingung genügen soll: Ist für eine Fläche des Vorrats der Rand unwesentlich isotop zu C, so stimmt er sogar mit C überein. Durch diese Bedingung wird die Aufweisbarkeit des Vorrats offenbar nicht zerstört.

Für die angekündigte Reduktion ist ein Kompliziertheitsbegriff erforderlich. Unter dem *Plattengrad* (F-Zahl) einer (beliebigen) Normalfläche $\mathfrak{F}$ verstehen wir die Anzahl der Elementarflächenstücke, die den Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit den Platten von Σ' ausmachen. Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ Normalflächen, so heißt $\mathfrak{F}$ *einfacher* als $\mathfrak{G}$, wenn der Plattengrad von $\mathfrak{F}$ kleiner als derjenige von $\mathfrak{G}$ ist.

Wir wollen nun annehmen, daß sich die folgenden drei Aussagen beweisen lassen:

I (Normalisierung). Charakteristische Flächen lassen sich normalisieren.

II (Reduktion). Wenn charakteristische Normalflächen existieren, so gibt es zu jeder nicht-fundamentalen charakteristischen Normalfläche eine einfachere charakteristische Normalfläche.

III (Signifikanz). Für jede Fläche eines repräsentativen Vorrats von Fundamentalflächen läßt sich auf endliche Weise feststellen, ob sie charakteristisch ist oder nicht.

Dann liegt ein endliches Verfahren vor, charakteristische Flächen aufzuweisen, wenn solche existieren. I und II besagen zusammen, daß charakteristische Fundamentalflächen vorhanden sein müssen, wenn es überhaupt charakteristische Flächen gibt. Es führt nämlich II nach endlich vielen Wiederholungen auf eine charakteristische Fundamentalfläche, weil der Plattengrad nicht unbeschränkt abnehmen kann. III ergibt dann ein endliches Verfahren, das entweder charakteristische Flächen aufweist oder die Existenz solcher Flächen verneint.

Der Beweis der Aussagen I, II, III ist von Anwendung zu Anwendung verschieden, weil die Definition der charakteristischen Flächen eingeht. Für die Normalisierung (I) wurde eine allgemeine Methode in 2.2 angegeben, für die jeweils noch die Ausführbarkeit der einzelnen Schritte nachzuprüfen ist.

Die Reduktion (II) beruht auf einem allgemeinen Ansatz, dem wir uns jetzt zuwenden. Zur Signifikanz (III) werden allgemeine Bemerkungen nicht benötigt.

§ 3. Erzeugung von Normalflächen durch Flächenpaare

3.1. Vorbemerkung. Wir werden zeigen, daß man eine (beliebige) Normalfläche $\mathfrak{F}$, die nicht Fundamentalfläche ist, aus zwei einfacheren, sich schneidenden Normalflächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ durch Umschalten der Schnittlinien erhalten kann. Ist $\mathfrak{F}$ charakteristisch, so braucht keine der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ charakteristisch zu sein. Es ergibt sich aber zu $\mathfrak{F}$ eine einfachere charakteristische Normalfläche möglicherweise dadurch, daß man Schnittlinien in anderer (irregulärer) Weise umschaltet oder Teile von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ wegläßt und die danach vorhandene Fläche normalisiert.

3.2. Paare von Flächensystemen zu einer Normalfläche. Es sei $\mathfrak{F}$ eine Normalfläche, die nicht fundamental ist, und $\mathfrak{x}$ ihr Schnittschema. $\mathfrak{x}$ ist als Summe zweier zulässiger Lösungen des Normalgleichungssystems darstellbar. Im allgemeinen ist dies auf mannigfache Weise möglich. Irgendeine solche Darstellung $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}''$ werde weiterhin betrachtet.

$\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ sind realisierbar. Aus den Schnitten von $\mathfrak{F}$ mit den Kugelrändern (von Σ') erhält man eine Realisierung von $\mathfrak{x}'$ bzw. $\mathfrak{x}''$ dadurch, daß man einen Teil der Schnittlinien wegläßt. Gemäß 2.4 sind $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ Schnittschemata von Flächensystemen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$, die aus Normalflächen bestehen. $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ müssen sich schneiden, weil sonst $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ zusammen ein System von Normalflächen bildeten, welches dasselbe Schnittschema wie die Fläche $\mathfrak{F}$ hätte, aber aus mindestens zwei Flächen bestände, was wegen 2.4 unmöglich ist. Wir werden $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ so wählen, daß die Schnitte in übersichtlicher Lage sind.

Wir betrachten zunächst die Schnitte von $\mathfrak{F}$ mit den Kugelrändern. Entsprechend der Darstellung $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}''$ werden diese Kurven auf Realisierungen von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ verteilt. Falls ein Schnitt-Typ $\mathfrak{P}_i$ in $\mathfrak{x}'$ und in $\mathfrak{x}''$ mit positiver Vielfachheit auftritt, darf diese Verteilung für die Kurven vom Typ $\mathfrak{P}_i$ in willkürlicher Weise vorgenommen werden; nur die richtige Vielfachheit für $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist wesentlich. Die Flächenstücke, die $\mathfrak{F}$ in den Kugeln bildet, werden entsprechend auf $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ verteilt.

Betrachten wir nun die Bänder, die $\mathfrak{F}$ in einem Balken $\mathfrak{B}$ bildet. Ihre Enden sind Schnittbögen von $\mathfrak{F}$ mit den beiden Inseln im Rande von $\mathfrak{B}$ (vgl. Fig. 7 und 13). Dabei stellen die Enden eines jeden Bandes ein Paar gekoppelter Bogentypen dar. Sind zu einem Paar gekoppelter Bogentypen mehrere Bänder von $\mathfrak{F}$ vorhanden, so schneiden diese aus $\mathfrak{B}$ ein „Brett" $\mathfrak{A}$ aus, das aus diesen Bändern und ihren Zwischenräumen besteht. $\mathfrak{A}$ trifft die übrigen Bänder von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{B}$ und die ihnen entsprechenden Bretter nicht. An den Enden von $\mathfrak{A}$ sind Schnittbögen von $\mathfrak{F}'$ vorgegeben, wobei die Anzahl an beiden Enden dieselbe ist, weil $\mathfrak{x}'$ Lösung von (3) ist. Dasselbe gilt für $\mathfrak{F}''$. Man erkennt nun ohne weiteres, daß sich die entsprechenden Bänder von $\mathfrak{F}'$

und $\mathfrak{F}''$ so wählen lassen, daß sie auf $\mathfrak{A}$ verlaufen und daß sich je zwei Bände in höchstens einem Querschnitt schneiden. (Fig. 14 zeigt den Sachverhalt in Schnitt.) Die Bänder von $\mathfrak{F}'$ schneiden sich dabei nicht untereinander, gleiche gilt für die Bänder von $\mathfrak{F}''$. Damit ergibt sich, daß sich die Bänder von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}''$ in allen Balken so bestimmen lassen, daß sich je zwei Bänder in höchstens einem Querschnitt schneiden und daß sich nur solche Bänder schneiden die zum selben Paar gekoppelter Bogentypen gehören.

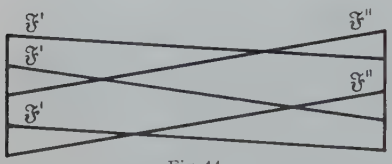

Fig. 14

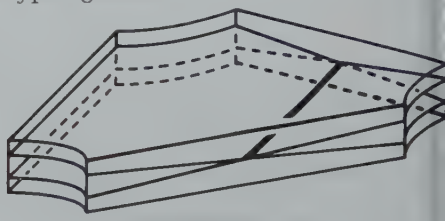
Fig. 15

$\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sind nun noch in den Platten durch Elementarflächenstücke zu ergänzen, deren Rand bereits festliegt. Dies kann offenbar so geschehen daß sich diese Elementarflächenstücke nur in Querschnitten schneiden (Fig. 15). Kein solcher Querschnitt kann einen Balkenanstoß mit sich selbst verbinden, weil sich sonst in diesem Balken zwei Bänder mehrfach schneiden müßten. Jedoch können sich zwei Elementarflächenstücke in mehreren Querschnitten durchsetzen (wenn mehr als drei Balken anstoßen).

Damit sind $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ so bestimmt, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ aus einfachen, paarweise disjunkten Schnittlinien besteht, die geschlossen sind oder in $\dot{M}$ entspringen und enden, wobei jede Schnittlinie abwechselnd durch Balken und Platten läuft.

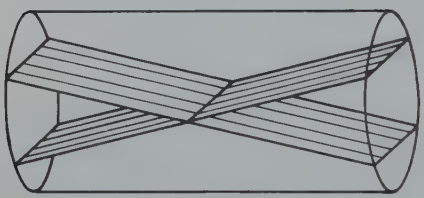
Fig. 16a

3.3. Umschalten von Schnittlinien.

Die Schnitte von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sollen durch Umschalten beseitigt werden. Wir betrachten zunächst in einem Balken $\mathfrak{B}$

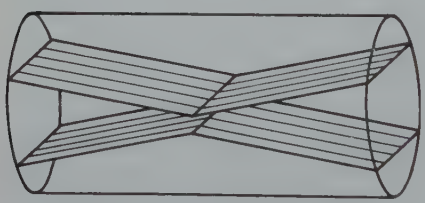
Fig. 16b

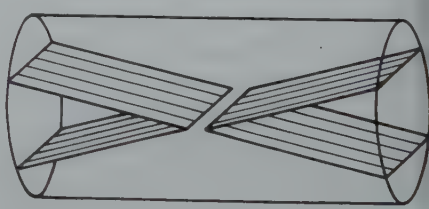
Fig. 16c

zwei sich schneidende Bänder $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ (Fig. 16a). Schneiden wir $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ längs ihres Schnittes auf, so lassen sich die vier entstehenden Elementarflächenstücke auf zwei verschiedene Weisen zu zwei disjunkten Elementarflächenstücken zusammenheften, nämlich entweder so, daß wieder zwei in Balkenrichtung verlaufende Bänder entstehen (Fig. 16b), oder so

daß die beiden entstehenden Elementarflächenstücke faltenartig in $\mathfrak{B}$ liegen (Fig. 16c). Die Beseitigung des Schnittes von a' und a'' gemäß Fig. 16b werde als *reguläre Umschaltung* bezeichnet, diejenige gemäß Fig. 16c als *irreguläre*. Setzt man die Umschaltung des Schnittes in eine anstoßende Platte fort (vgl. Fig. 15), so entstehen aus den beiden betroffenen Elementarflächenstücken zwei Elementarflächenstücke, die im Falle der regulären Umschaltung wieder „parallel" zu Boden und Dach der Platte liegen, und die im Falle der irregulären Umschaltung faltenartig liegen, so daß sie aus der Platte in die anstoßenden Balken und Kugeln verdrängt werden können. Setzt man nun die Umschaltung von der Platte noch weiter in einen anstoßenden Balken fort, so erhält man dort dieselbe Umschaltungsart, von der man ausgegangen war. Man bemerkt, daß eine kohärente Umschaltung einer Schnittlinie von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ entweder überall regulär oder überall irregulär ist.

Für die geschlossenen Schnittlinien von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ ergibt sich hieraus eine bemerkenswerte Folgerung, die später von Bedeutung sein wird: Ist eine geschlossene Schnittlinie s von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ orientierungsumkehrend auf $\mathfrak{F}'$ (d. h. s besitzt ein Möbius-Band als Umgebung auf $\mathfrak{F}'$), so ist sie auch orientierungsumkehrend auf $\mathfrak{F}''$, weil sich andernfalls der Umschaltsinn längs s umkehrte.

Werden sämtliche Schnitte von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ regulär umgeschaltet, so ergibt sich ein Flächensystem, das aus Normalflächen besteht. Es hat dasselbe Schnittschema wie $\mathfrak{F}$, weil an den Schnitten der Kugelränder mit $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ nichts geändert wird. Durch reguläres Umschalten aller Schnitte von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ erhält man also $\mathfrak{F}$ (bis auf unwesentliche Isotopie).

3.4. Erzeugendes Normalflächenpaar. Wird nur ein Teil der Schnittlinien von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ umgeschaltet (regulär oder irregulär), so können Flächensysteme entstehen, deren Flächen außer gegenseitigen Schnitten auch Selbstdurchdringungen (Singularitäten) besitzen. (Die Flächen können durch die Komponenten eines schnittfreien Urbildes erklärt werden.)

$\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ bestehen zusammen aus mindestens zwei Flächen, während $\mathfrak{F}$ eine einzige Fläche ist. Weil $\mathfrak{F}$ aus $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ durch reguläres Umschalten aller Schnittlinien entsteht, muß es in dem System dieser Schnittlinien ein Teilsystem geben, das maximal bezüglich folgender Eigenschaft ist: Werden alle Schnitte des Teilsystems regulär umgeschaltet, so entstehen aus $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ genau zwei Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$.

Aus der Forderung der Maximalität ergeben sich wichtige Folgerungen.

(1) $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind frei von Selbstdurchdringungen.

Besäße nämlich etwa $\mathfrak{F}_1$ eine Selbstdurchdringung, so könnte diese regulär umgeschaltet werden, und es wären danach weiterhin zwei oder drei Flächen vorhanden. Beides widerspricht der Maximalitätsforderung.

(2) $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind Normalflächen. Sind $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die Schnittschemata von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$.

Dies folgt unmittelbar aus (1) und der Tatsache, daß nur reguläre Umschaltungen vorgenommen wurden.

(3) Der Plattengrad von $\mathfrak{F}$ ist die Summe der Plattengrade von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$.

Dies folgt daraus, daß $\mathfrak{F}$ aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ durch reguläres Umschalten entsteht.

(4) $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ schneiden sich. Werden irgendwelche Schnitte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ regulär umgeschaltet, so entsteht stets eine einzige Fläche (mit Selbstdurchdringungen, wenn nicht alle Schnitte umgeschaltet werden). $\mathfrak{F}$ entsteht aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ durch reguläres Umschalten aller Schnittlinien.

(5) Wird eine der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ durch eine Schnittlinie s zerlegt, so zerlegt s die andere Fläche nicht.

Man erhielte andernfalls vier Flächenteile, wenn man $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs s aufschneidet. Nach regulärer Umschaltung von s müßten wieder zwei Flächen vorhanden sein, was ausgeschlossen ist.

Außerdem gilt noch wie in 3.3

(6) Ist eine geschlossene Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ orientierungsumkehrend auf $\mathfrak{F}_1$, so ist sie auch orientierungsumkehrend auf $\mathfrak{F}_2$.

Schließlich gilt offenbar noch

(7) Werden Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ umgeschaltet, so ändert sich die Gesamtcharakteristik nicht. Insbesondere ist $\chi(\mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{F}_1) + \chi(\mathfrak{F}_2)$.

Zu $\mathfrak{F}$ werden statt $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ weiterhin $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ betrachtet. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heißen ein *erzeugendes Normalflächenpaar* für $\mathfrak{F}$.

3.5. Reduktionsmöglichkeiten. Es sei nun $\mathfrak{F}$ eine Normalfläche, die charakteristisch, aber nicht fundamental ist. $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ sei ein erzeugendes Normalflächenpaar für $\mathfrak{F}$.

Ist $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ charakteristisch, so hat man eine charakteristische Normalfläche vorliegen, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist.

Sei dies jetzt nicht der Fall. Schaltet man Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (möglicherweise nicht alle) so um, daß mindestens eine Umschaltung irregulär erfolgt, so kann es sein, daß dabei eine Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ entsteht, die frei von Selbstdurchdringungen und charakteristisch ist. Außer $\tilde{\mathfrak{F}}$ können noch andere Flächen entstehen, die Selbstdurchdringungen haben und $\tilde{\mathfrak{F}}$ schneiden dürfen. Betrachtet man die irreguläre Umschaltung eines Schnittbogens innerhalb einer Platte, so entstehen aus den beiden beteiligten Elementarflächenstücken von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zwei faltenartig liegende, wie in 3.3 bemerkt wurde. Diese können sich nicht gegenseitig, aber sich noch selbst und andere Flächenstücke schneiden. Durch die weiter vorzunehmenden Umschaltungen kann sich die faltenartige Lage noch komplizieren, und es können auch Flächenstücke entstehen, die mehrere Ränder besitzen. Es läßt sich aber jedenfalls die Platte

„senkrecht" so durchstechen, daß auf dem Durchstich die Anzahl der Schnittpunkte mit den jetzt vorliegenden Flächenstücken um mindestens zwei kleiner ist als die Anzahl der Flächenstücke von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die vor dem Umschalten in der Platte lagen. Hieraus folgt, daß man für die Normalisierung von $\tilde{\mathfrak{F}}$ gemäß 2.2 den 4. Schritt so vornehmen kann, daß die Anzahl der in den Platten liegenden Flächenstücke von $\tilde{\mathfrak{F}}$ kleiner als der Plattengrad von $\mathfrak{F}$ wird. Die ersten drei Schritte des Normalisierens sind für $\tilde{\mathfrak{F}}$ gegenstandslos. Die auf den 4. Schritt folgenden Schritte können die Zahl der Flächenstücke von $\tilde{\mathfrak{F}}$ in den Platten nur noch verringern, so daß man aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ durch Normalisieren[7]) eine charakteristische Normalfläche erhält, deren Plattengrad kleiner als derjenige von $\mathfrak{F}$ ist.

Wir weisen noch auf einen Spezialfall hin. Es mögen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs sämtlicher Schnittlinien aufgeschnitten werden. Wenn es gelingt, aus den nun vorliegenden Flächenteilen eine charakteristische Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ so aufzubauen, daß nicht alle Flächenteile verwendet werden, so ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ entweder eine der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, und damit eine einfachere charakteristische Normalfläche als $\mathfrak{F}$, oder es ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine Fläche, die aus $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ durch Umschalten gewisser Schnittlinien entsteht. Ist das letzte der Fall, so ist mindestens eine Umschaltung irregulär, weil bei nur regulären Umschaltungen wegen 3.4, (4) keine Flächenteile abfallen können. Nach dem Vorangehenden läßt sich aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine charakteristische Normalfläche erhalten, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist.

§ 4. Zerfallende Verkettungen

4.1. Satz. *Ist eine Verkettung V in der S^3 gegeben, so läßt sich entscheiden, ob V zerfällt*[8]).

Unter einer Verkettung V wird hier ein Polygonsystem verstanden. V zerfällt, wenn die S^3 durch eine zu V disjunkte 2-Sphäre so in zwei Kugeln zerlegt werden kann, daß jede der beiden Kugeln mindestens eine Komponente von V enthält.

Daß V in der S^3 gegeben ist, soll bedeuten, daß eine reguläre Zellenzerlegung der S^3 und V als Unterkomplex dieser Zellenzerlegung gegeben sind. Ist zunächst V als Verkettung im R^3 durch eine normierte Projektion oder durch ein Polygonsystem gegeben, so läßt sich erreichen, daß V als Verkettung in der S^3 gegeben ist. Zu gegebener normierter Projektion läßt sich nämlich jedenfalls ein Polygonsystem im R^3 finden, das diese Projektion besitzt. Liegt ein Polygonsystem V im R^3 vor, so ist es im Innern eines geeigneten 3-Simplexes E^3 des R^3 enthalten, und es kann eine reguläre Zellenzerlegung von E^3 angegeben werden, für welche V Unterkomplex ist, beispielsweise so: Es kann angenommen werden, daß auf V keine drei aufeinander folgenden Kanten in einer Ebene liegen. Zerlegt man E^3 durch alle Ebenen, die durch je zwei aufeinander folgende Kanten von V gehen, so entsteht eine Zellenzerlegung

[7]) Wir nehmen an, daß dies ausführbar ist.

[8]) Haken [1].

der gewünschten Art. Faßt man nun E^3 als ein 3-Simplex einer S^3 auf, die in fünf 3-Simplexe zerlegt ist[9]), so erhält man V als gegebene Verkettung in der S^3.

Nach PAPAKYRIAKOPOULOS [3] ist der Satz gleichwertig damit, daß von einer in der S^3 gegebenen Verkettung V entschieden werden kann, ob die Fundamentalgruppe des Komplements von V ein freies Produkt ist oder nicht.

4.2. Beweisansatz. V wird zunächst aus der S^3 ausgebohrt, d.h. es werden die Komponenten von V mit paarweise disjunkten Vollringen umgeben, welche die Komponenten als Seelen[10]) besitzen, und das Innere dieser Vollringe wird aus der S^3 entfernt. Solche Vollringe kann man beispielsweise aus „Kugeln" und „Balken" nach Art von 2.1 erhalten. Durch das Ausbohren von V entsteht aus der S^3 eine berandete Mannigfaltigkeit M. Vermöge der vorhandenen Zellenzerlegung der S^3 und des Randes von M ergibt sich eine Zellenzerlegung Σ von M. M ist in die S^3 eingebettet, was im folgenden benutzt wird. $\dot{M}$ bezeichnet wieder den Rand von M.

Jede 2-Sphäre in M zerlegt M, weil die S^3 durch jede 2-Sphäre zerlegt wird. Die Aussage, daß V zerfällt, ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß M durch eine 2-Sphäre so zerlegt werden kann, daß auf jedem Teil mindestens eine Komponente von $\dot{M}$ liegt. Von einer solchen 2-Sphäre wollen wir sagen, daß sie $\dot{M}$ trennt. Für M charakteristische Flächen seien nun diejenigen 2-Sphären auf M, die $\dot{M}$ trennen. Der Satz ist damit auf eine Aussage über die für M charakteristischen Flächen zurückgeführt.

Nach 2.6 sind die Aussagen I, II und III (Normalisierung, Reduktion, Signifikanz) zu beweisen.

Die Signifikanz ergibt sich einfach. Für jede Normalfläche $\mathfrak{F}$ (bezüglich der zu Σ gehörigen Normalzerlegung Σ' von M) ist vermöge $\chi(\mathfrak{F})$ feststellbar, ob sie eine 2-Sphäre ist. Sei dies für $\mathfrak{F}$ der Fall. $\mathfrak{F}$ bewirkt eine Unterteilung von Σ', vermöge deren rein kombinatorisch entschieden werden kann, ob $\mathfrak{F}$ charakteristisch ist.

Die Normalisierung ergibt sich ohne weiteres aus 2.2. Die den Rand betreffenden Schritte sind gegenstandslos. Von den übrigen ist nur der 7. Schritt keine isotope Deformation. Er ist jedoch ausführbar nach dem dort angegebenen Beispiel 2.

Nur II ist noch zu beweisen.

4.3. Reduktion. Nehmen wir an, daß es eine charakteristische Normalfläche $\mathfrak{F}$ gibt, die nicht fundamental ist. $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ sei ein erzeugendes Normalflächenpaar für $\mathfrak{F}$ gemäß 3.4. Wegen 3.4, (7) und $\chi(\mathfrak{F}) = 2$ muß eine der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, etwa $\mathfrak{F}_1$, die Charakteristik 2 und die andere, also $\mathfrak{F}_2$, die Charakteristik 0 haben. $\chi(\mathfrak{F}_1) = \chi(\mathfrak{F}_2) = 1$ ist nämlich ausgeschlossen, weil sonst $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (singularitätenfreie) projektive Ebenen in M und damit in der S^3 wären, was unmöglich ist. Entsprechend folgt, daß $\mathfrak{F}_2$ ein Torus und kein

[9]) Vgl. [5], [6].
[10]) Vgl. [6], § 6.

Kleinscher Schlauch ist. $\mathfrak{F}_1$ ist eine 2-Sphäre. Ist $\mathfrak{F}_1$ charakteristisch, so liegt eine charakteristische Normalfläche vor, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist.

Sei nun $\mathfrak{F}_1$ nicht charakteristisch. Die 2-Sphäre $\mathfrak{F}_1$ trenne also $\hat{M}$ nicht. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{F}_1$ die S^3 so in zwei Kugeln $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ zerlegt, daß die Verkettung V im Inneren einer dieser beiden Kugeln liegt, etwa im Inneren von $\mathfrak{M}_1$. $\mathfrak{F}_1$ wird durch jede Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zerlegt. Wegen 3.4, (5) erlegt keine solche Schnittlinie $\mathfrak{F}_2$. Es folgt, daß $\mathfrak{F}_2$ durch die Schnitte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in Kreisringe zerlegt wird, die abwechselnd in $\mathfrak{M}_1$ und in $\mathfrak{M}_2$ liegen. Wird von den beiden Teilen, in welche die S^3 durch $\mathfrak{F}$ zerlegt wird, der eine schwarz, der andere weiß gefärbt, so ergibt sich eine entsprechende Schwarz-Weiß-Färbung für diejenigen Bereiche der S^3, die beim Zerschneiden der S^3 längs $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ entstehen. Weil $\mathfrak{F}$ charakteristisch ist, können nicht alle Komponenten von V in den schwarzen oder in den weißen Bereichen liegen. Hieraus folgt: $\mathfrak{M}_1$ wird durch einen Kreisring $\mathfrak{r}$ auf $\mathfrak{F}_2$ so zerlegt, daß beide Teile Komponenten von V enthalten. $\mathfrak{r}$ bildet zusammen mit zwei Elementarflächenstücken auf $\mathfrak{F}_1$ eine charakteristische 2-Sphäre $\tilde{\mathfrak{F}}$. Nach 3.5 läßt sich aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine charakteristische Normalfläche erhalten, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist. Dies war zu zeigen.

4.4. Zusatz. Zerfällt die Verkettung V in die Verkettungen V_1 und V_2, so wollen wir sagen, daß V Summe von V_1 und V_2 ist. Wenn dabei V_1 oder V_2 eine zerfallende Verkettung ist, so gibt es noch andere Darstellungen von V als Summe zweier Verkettungen. Im Vorangehenden ist beim 7. Schritt des Normalisierens und bei der Reduktion möglicherweise von einer Summendarstellung von V zu einer anderen übergegangen worden. Hat man durch eine Fundamentalfläche eine Summendarstellung von V gefunden, so läßt sich das Verfahren auf die Summanden erneut anwenden und so oft wiederholen, bis man V als Summe von nicht zerfallenden Verkettungen erhält. Die Anzahl dieser Summanden ist offenbar nicht größer als die Anzahl der Komponenten von V. Man kann leicht zeigen, daß sich V und seine nicht zerfallenden Summanden gegenseitig umkehrbar eindeutig bis auf semilineare Äquivalenz bestimmen.

§ 5. Das Geschlecht von Knoten

5.1. Satz. *Es sei $\hat{M}$ eine kompakte, möglicherweise berandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. k sei eine einfache, geschlossene Kurve im Innern von $\hat{M}$, die Unterkomplex einer gegebenen regulären Zellenzerlegung von $\hat{M}$ ist. Es läßt sich entscheiden, ob k auf $\hat{M}$ eine orientierbare Fläche berandet. Ist dies der Fall, so läßt sich eine von k berandete Fläche maximaler Charakteristik aufweisen. Entsprechende Aussagen gelten, wenn orientierbare Flächen durch beliebige Flächen ersetzt werden.*

Ein Spezialfall des Satzes ist die Entscheidbarkeit der Frage, ob k ein Kreis, d.h. Rand eines Elementarflächenstückes auf $\hat{M}$ ist [11]).

[11]) Vgl. Haken [1].

Ist speziell $\hat{M} = S^3$, so ergibt sich, daß das Geschlecht eines Knote (SEIFERT [7]) bestimmt werden kann [11]). Damit ist insbesondere für ein Knoten k in der S^3 entscheidbar, ob die Fundamentalgruppe seines Kompl ments frei zyklisch ist. Wegen des von PAPAKYRIAKOPOULOS [4] bewiesen Dehnschen Lemmas ist dies genau dann der Fall, wenn k ein Kreis ist. F die Vorgabe eines Knotens in der S^3 gelten die Bemerkungen in 4.1.

5.2. Beweisansatz. Da k Unterkomplex von $\hat{M}$ ist, läßt sich eine Ur gebung $\mathfrak{V}$ von k angeben, die aus „Kugeln" und „Balken" nach Art von 2 besteht. $\mathfrak{T}$ sei der Rand von $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{T}$ ist ein Torus oder ein Kleinscher Schlauc M entstehe aus $\hat{M}$ dadurch, daß das Innere von $\mathfrak{V}$ weggelassen wird. Aus d vorhandenen Zellenzerlegung von $\hat{M}$ und aus $\mathfrak{T}$ erhält man eine regulä Zellenzerlegung Σ von M. Σ' sei wieder die zugehörige Normalzerlegu von M.

Beim Bestimmen von $\mathfrak{V}$ kann innerhalb eines „Balkens" von $\mathfrak{V}$ ei Meridianfläche $\mathfrak{m}$ angegeben werden, die k in nur einem Punkte trifft. (Wi $\mathfrak{V}$ längs $\mathfrak{m}$ aufgeschnitten, so entstehen aus $\mathfrak{V}$ und k eine Kugel mit unve knoteter Sehne.) Der Rand von $\mathfrak{m}$ sei m. Er ist ein Meridian von $\mathfrak{T}$. D Meridianfläche $\mathfrak{m}$ kann so angegeben werden, daß m die Randseen auf in denen Kugeln von Σ' anstoßen, nicht trifft und daß m die übrigen Fläche stücke von Σ' auf $\mathfrak{T}$ in jeweils höchstens einem Querschnitt überquert.

Ist $\hat{\mathfrak{F}}$ eine Fläche auf $\hat{M}$, die k als Rand besitzt, so kann sie bei feste Rand isotop so deformiert werden, daß ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{V}$ aus eine Kreisring und ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{m}$ aus einem Querschnitt dieses Krei ringes besteht. Der außerhalb $\mathfrak{V}$ liegende Teil von $\hat{\mathfrak{F}}$ ist dann eine Fläche deren Rand auf $\mathfrak{T}$ liegt und m in nur einem Punkte schneidet. Liegt umg kehrt eine solche Fläche $\mathfrak{F}$ vor, so kann sie durch einen Kreisring auf $\mathfrak{V}$ einer von k berandeten Fläche $\hat{\mathfrak{F}}$ ergänzt werden [12]). $\mathfrak{F}$ und $\hat{\mathfrak{F}}$ stimmen i Orientierbarkeitscharakter überein. Damit ist die Fragestellung auf M zurüc geführt. Wir betrachten den Fall orientierbarer Flächen. Der Fall beliebig Flächen ergibt sich aus dem folgenden Beweis durch Vereinfachungen.

Eine Fläche auf M heiße jetzt charakteristisch, wenn sie orientierbar is wenn ihr Rand eine Kurve auf $\mathfrak{T}$ ist, die m in genau einem Punkte schneide und wenn sie unter allen orientierbaren Flächen mit solchem Rand v maximaler Charakteristik ist. Dabei bleibe offen, ob es auf M orientierba Flächen mit einem Rand der angegebenen Art gibt. Dies könnte mit hom logischen Hilfsmitteln entschieden werden, wird aber hier nicht benötigt.

Es sind nur die Aussagen I, II und III von 2.6 (Normalisierung, Reduktio Signifikanz) zu beweisen.

Nehmen wir an, daß I und II bei hypothetischer Existenz von chara teristischen Flächen bereits bewiesen sind, so ergibt sich die Signifikanz a einfache Weise. Wenn es überhaupt orientierbare Flächen gibt, deren Ra die gewünschten Eigenschaften hat, so muß es charakteristische Flächen geb

[12]) Wegen der Gestalt von $\mathfrak{V}$ ist ein solcher Kreisring aufweisbar.

und unter diesen wegen I und II Fundamentalflächen. Bis auf unwesentliche Isotopie werden alle Fundamentalflächen durch einen endlichen, repräsentativen Flächenvorrat erfaßt, der aufgewiesen werden kann. Für jede Fläche dieses Vorrats läßt sich nachprüfen, ob sie orientierbar ist und ob ihr Rand die gewünschte Gestalt hat. Findet man solche Flächen in dem Vorrat nicht auf, so gibt es keine charakteristischen Flächen. Findet man welche auf, so lassen sich diejenigen aussondern, die von maximaler Charakteristik sind. Sie sind charakteristisch.

Es bleiben noch I und II zu beweisen.

5.3. Normalisierung. Wir nehmen an, daß es eine charakteristische Fläche $\mathfrak{F}$ gibt. Es ist zu zeigen, daß die einzelnen Schritte in 2.2 ausführbar sind. Dabei kann man sich auf die Schritte 3, 5, 7 und 8 beschränken; alle anderen sind Isotopien bei festem Rand.

Der 3. Schritt fegt $\dot{\mathfrak{F}}$ aus den Flächenstücken von $\mathfrak{T}$ aus, in denen Platten anstoßen. Weil m ein solches Flächenstück höchstens einmal kreuzt, kann dieses Ausfegen so vorgenommen werden, daß sich $\dot{\mathfrak{F}}$ und m stets nur in einem Punkte schneiden, was übrigens nur für die Endlage wesentlich ist.

Der 5. Schritt beseitigt Schleifen von $\dot{\mathfrak{F}}$, die auf Randseen liegen oder einen Randsee mit sich selbst verbinden. m meidet die Randseen und hat mit $\dot{\mathfrak{F}}$ nur einen Schnittpunkt gemein. Hieraus folgt, daß m keine Schleife von $\dot{\mathfrak{F}}$ trifft und daß jede solche Schleife durch Deformation über ein zu m punktfremdes Flächenstück beseitigt werden kann.

Der 7. Schritt ist ausführbar nach dem in 2.2 angegebenen Beispiel 3. Daß der Rand hier nicht fest vorgegeben ist, spielt keine Rolle, da $\dot{\mathfrak{F}}$ bei diesem Schritt ungeändert bleibt.

Bei dem 8. Schritt wird $\mathfrak{F}$ längs eines Querschnittes aufgeschnitten, und an die beiden entstehenden Randbögen werden Elementarflächenstücke angeheftet. Dabei geht $\mathfrak{F}$ in ein Flächensystem $\mathfrak{F}^+$ über, das aus ein oder zwei Flächen besteht. $\mathfrak{F}^+$ ist orientierbar, und es ist $\chi(\mathfrak{F}^+) = \chi(\mathfrak{F}) + 1$. Der Rand $\dot{\mathfrak{F}}^+$ von $\mathfrak{F}^+$ hat ebenso wie $\dot{\mathfrak{F}}$ nur einen Schnittpunkt mit m gemein, weil $\dot{\mathfrak{F}}$ nur in Grenznähe eines Randsees geändert wird und m die Randseen meidet. Wäre $\dot{\mathfrak{F}}^+$ zusammenhängend, so wäre $\mathfrak{F}^+$ eine einzige Fläche, die geeigneten Rand, aber zu große Charakteristik hätte [13]).

$\dot{\mathfrak{F}}^+$ muß also aus zwei Kurven t_1 und t_2 auf $\mathfrak{T}$ bestehen, wovon eine, etwa t_1, den Meridian m in einem Punkte schneidet, während die andere, also t_2, weder m noch t_1 trifft. m und t_1 bilden ein Paar konjugierter Rückkehrschnitte auf $\mathfrak{T}$. Daher ist t_2 Rand eines Elementarflächenstückes $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{T}$, das m und t_1 nicht enthalten kann. $\mathfrak{h}$ werde zu $\mathfrak{F}^+$ hinzugenommen und von $\mathfrak{T}$ ins Innere von M abgehoben. Dabei bleibt die Orientierbarkeit erhalten, die Charakteristik erhöht sich nochmals um 1, und der Rand ist wieder eine Kurve der gewünschten Gestalt. Weil $\mathfrak{F}$ bei solchem Rand von maximaler Charakteristik

[13]) Dieser Schluß bleibt bestehen, wenn $\mathfrak{F}$ nicht-orientierbar ist.

ist, müssen jetzt zwei Flächen vorliegen, wovon eine mindestens die Charakteristik 2 haben muß, also eine 2-Sphäre ist, während die andere eine charakteristische Fläche ist, die nun an die Stelle von $\mathfrak{F}$ tritt (insgesamt wurde von $\mathfrak{F}$ ein Elementarflächenstück abgeschnitten und ein anderes dafür angefügt). Der 8. Schritt ist also ausführbar und damit die gesamte Normalisierung.

Wir merken an, daß wir das eben angegebene Verfahren, eine zusätzliche Randkurve unter Erhöhung der Charakteristik zu beseitigen, weiter unten noch mehrfach benutzen.

5.4. Reduktion. Wir nehmen an, daß es eine charakteristische Normalfläche $\mathfrak{F}$ gibt, die nicht fundamental ist. $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ sei ein erzeugendes Normalflächenpaar für $\mathfrak{F}$ gemäß 3.4. Es ist möglich, daß $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ berandet sind und mehrere Randkurven besitzen. Nur auf einer dieser Randkurven liege ein Schnittpunkt mit m. Diese Randkurve gehöre zu $\mathfrak{F}_1$. $\mathfrak{F}_1$ kann nicht orientierbar sein. Es werde $\mathfrak{F}$ mit einer Orientierung versehen. Zerschneiden wir $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs ihrer Schnitte, so sind die entstehenden Teile orientierbar. Sie mögen mit der von $\mathfrak{F}$ herrührenden Orientierung versehen sein. Je nach Gestalt dieser Teile unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall. Unter den Teilen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ befinden sich Elementarflächenstücke, die von geschlossenen Schnittlinien berandet werden.

Elementarflächenstücke dieser Art nennen wir unzerlegte Elementarflächenstücke von $\mathfrak{F}$.

a) Es kann sein, daß ein unzerlegtes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ dadurch entsteht, daß eine projektive Ebene längs eines orientierbarmachenden Rückkehrschnittes s aufgeschnitten wird. Dann ist $\mathfrak{F}_2$ eine projektive Ebene und s der einzige Schnitt von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. Wegen 3.4, (6) ist s orientierungsumkehrend auf $\mathfrak{F}_1$ und auf $\mathfrak{F}_2$, und insbesondere zerlegt s weder $\mathfrak{F}_1$ noch $\mathfrak{F}_2$. Wir schalten s irregulär um. Es entsteht eine einzige Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, die orientiert ist und mit $\mathfrak{F}$ in Rand und Charakteristik übereinstimmt. Gemäß 3.5 läßt sich durch Normalisieren von $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine charakteristische Normalfläche erhalten, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist.

b) Die unzerlegten Elementarflächenstücke von $\mathfrak{F}$ seien von nun an von Schnittlinien berandet, die $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ zerlegen. Sei $\mathfrak{e}$ ein solches und s sein Rand. Wir schalten alle Schnitte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ außer s regulär um und zerschneiden längs s. Dann müssen genau 3 berandete Flächenteile von $\mathfrak{F}$ vorliegen, nämlich $\mathfrak{e}$, ein Teil $\mathfrak{F}'$, der s nur einmal im Rande enthält, und ein Teil $\mathfrak{F}''$, der zwei von s herrührende Randkurven besitzt. Jedenfalls müssen aus s vier Randkurven entstehen, weil s nicht orientierungsumkehrend ist. Diese Randkurven können sich nicht auf 4 Flächenteile verteilen, weil sonst die reguläre Umschaltung von s nicht $\mathfrak{F}$ sondern zwei Flächen ergäbe. Es können auch nicht nur 2 Flächenteile vorliegen, sonst besäße der von $\mathfrak{e}$ verschiedene Teil drei von s herrührende Randkurven, die durch drei Exemplare von $\mathfrak{e}$ unter gegenseitigem Abheben verschlossen werden könnten. Es entstände eine orientierbare Fläche, die denselben Rand wie $\mathfrak{F}$, aber größere Charakteristik hätte, was unmöglich ist.

Liegt $\dot{\mathfrak{F}}$ auf $\mathfrak{F}'$, so bilden $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{e}$ eine orientierbare Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, die $\dot{\mathfrak{F}}$ als Rand besitzt und deren Charakteristik nicht kleiner als $\chi(\mathfrak{F})$ sein kann. Denn es ist $\chi(\mathfrak{F}'') \leqq 0$ wegen der beiden Randkurven von $\mathfrak{F}''$, und es ist $\chi(\mathfrak{F}) = \chi(\mathfrak{e}) + \chi(\mathfrak{F}') + \chi(\mathfrak{F}'')$. Also ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ charakteristisch. Gemäß 3.5 führt $\tilde{\mathfrak{F}}$ auf eine charakteristische Normalfläche, die einfacher als $\mathfrak{F}$ ist.

c) Es kann weiterhin angenommen werden, daß $\dot{\mathfrak{F}}$ zu $\mathfrak{F}''$ gehört. Fügt man nun vorübergehend je ein Exemplar von $\mathfrak{e}$ in die beiden zu s gehörigen Randkurven von $\mathfrak{F}''$ ein und hebt man diese beiden Exemplare voneinander ab, so entsteht eine orientierbare Fläche mit Rand $\dot{\mathfrak{F}}$. Ihre Charakteristik kann nicht größer als $\chi(\mathfrak{F})$ sein, weil $\mathfrak{F}$ charakteristisch ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{F}'$ ein Elementarflächenstück sein muß. Ist $\mathfrak{F}'$ unzerlegt, so muß $\mathfrak{F}_2$ aus $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{F}'$ bestehen[14]), weil s andernfalls $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zugleich zerlegte, was wegen 3.4, (5) ausgeschlossen ist. Außerdem muß s die einzige Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sein. In diesem Falle erhält man durch irreguläres Umschalten von s eine charakteristische Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, und aus ihr durch Normalisieren gemäß 3.5 eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

d) Es bleibt der Fall zu betrachten, daß sich $\mathfrak{F}'$ aus mehreren Teilen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zusammensetzt. Wir nennen dann $\mathfrak{F}'$ das zu $\mathfrak{e}$ gehörige zerlegte Elementarflächenstück. Auf $\mathfrak{F}'$ muß ein unzerlegtes Elementarflächenstück von $\mathfrak{F}$ liegen. Nach der bisherigen Diskussion können wir annehmen, daß es zu jedem unzerlegten Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{F}$ ein zugehöriges zerlegtes $\mathfrak{e}'$ gibt. Da $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ durch ihre Schnitte in nur endlich viele Teile zerfallen, gibt es unzerlegte Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$ derart, daß $\mathfrak{e}_{i+1}$ auf dem zu $\mathfrak{e}_i$ gehörigen zerlegten Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_i'$ liegt ($i = 1, 2, \ldots, r$; Indices modulo r). $s_1, s_2, \ldots, s_r$ seien die Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$ ausschneiden. Wir schalten alle Schnitte regulär um, lassen aber $s_1, s_2, \ldots, s_r$ als Berührungslinien bestehen. Danach lassen wir die zerlegten Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_r'$ fort und fügen an die entstehenden Ränder $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$ an, soweit sie benötigt werden. Es entsteht eine charakteristische Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, aus der man wegen 3.5 durch Normalisieren eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$ erhält[15]).

Damit ist der 1. Fall vollständig erledigt.

2. Fall. Der 1. Fall tritt nicht ein. Unter den Teilen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ befinden sich Elementarflächenstücke, die von $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ durch einen einzigen Querschnitt abgeschnitten werden und auf deren Rand nicht der Schnittpunkt von $\dot{\mathfrak{F}}$ und m liegt.

Unter unzerlegten Elementarflächenstücken von $\mathfrak{F}$ wollen wir jetzt solche Elementarflächenstücke verstehen. Die Diskussion entspricht der des 1. Falles.

a) Elementarflächenstücke, die durch Aufschneiden eines Möbius-Bandes oder Kreisringes längs eines einzigen Querschnittes entstehen, zählen nicht

[14]) $\mathfrak{F}_1$ kommt wegen seines Randes nicht in Frage.

[15]) Tatsächlich ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ bereits Normalfläche.

zu den unzerlegten. Daher ist kein Analogon zum Abschnitt a) des 1. Falles vorhanden.

b) Es sei $\mathfrak{e}$ ein unzerlegtes Elementarflächenstück und s die Schnittlinie, die $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{F}_1$ oder $\mathfrak{F}_2$ abschneidet. Nach Abschnitt a) besitzt $\mathfrak{e}$ nur einen Randbogen, der von s herrührt. Wir schalten alle von s verschiedenen Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ regulär um und zerschneiden längs s, womit sich die Gesamtcharakteristik um 2 erhöht. Es müssen nun genau drei Flächenteile vorliegen, nämlich $\mathfrak{e}$, ein Teil $\mathfrak{F}'$, der s nur einmal im Rande enthält, und ein Teil $\mathfrak{F}''$, der zwei von s herrührende Randbögen besitzt. Wären 4 Teile vorhanden, so würden durch reguläres Umschalten von s zwei Flächen und nicht $\mathfrak{F}$ entstehen. Wären nur 2 Teile vorhanden, so besäße der von $\mathfrak{e}$ verschiedene Teil drei von s herrührende Randbögen. An diese könnten drei Exemplare von $\mathfrak{e}$ angesetzt werden (die gleichzeitig voneinander abgehoben werden), wodurch eine orientierbare Fläche $\mathfrak{F}^+$ mit $\chi(\mathfrak{F}^+)=\chi(\mathfrak{F})+1$ entstände. Der Rand von $\mathfrak{F}^+$ hätte wieder nur einen Schnittpunkt mit m gemein, weil m den Rand von $\mathfrak{e}$ nicht trifft. Die Annahme, daß $\mathfrak{F}^+$ nur eine Randkurve besitzt, ist widerspruchsvoll wegen $\chi(\mathfrak{F}^+)>\chi(\mathfrak{F})$. Die Annahme, daß $\mathfrak{F}^+$ mehrere Randkurven besitzt, ist ebenfalls widerspruchsvoll. Wie in 5.3 folgte, daß diejenigen Randkurven, die m nicht schneiden, Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{T}$ beranden. Man könnte daher der Reihe nach solche Elementarflächenstücke zu $\mathfrak{F}^+$ hinzunehmen und von $\mathfrak{T}$ ins Innere von M abheben, bis nur noch eine Randkurve vorliegt. Die Charakteristik würde sich dabei weiter erhöhen, was den Annahmen über $\mathfrak{F}$ widerspricht. Tatsächlich liegen also die Teile $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ vor.

Nehmen wir zunächst an, daß m den Rand von $\mathfrak{F}'$ schneidet. Dann bilden $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{e}$ zusammen eine orientierbare Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, deren Rand von m in einem Punkte geschnitten wird. Wegen $\chi(\mathfrak{F}'')\leqq 1$, $\chi(\mathfrak{e})+\chi(\mathfrak{F}')+\chi(\mathfrak{F}'')=\chi(\mathfrak{F})+2$ und $\chi(\tilde{\mathfrak{F}})=\chi(\mathfrak{F}')$ muß $\chi(\tilde{\mathfrak{F}})\geqq\chi(\mathfrak{F})$ sein. $\tilde{\mathfrak{F}}$ besitzt nur eine Randkurve, weil man andernfalls aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ wie zuvor eine orientierbare Fläche mit nur einer Randkurve und größerer Charakteristik als $\mathfrak{F}$ erhalten könnte. $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist also charakteristisch und führt gemäß 3.5 auf eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

c) Es kann nunmehr angenommen werden, daß m den Rand von $\mathfrak{F}''$ schneidet. Fügt man vorübergehend an die beiden zu s gehörigen Randbögen zwei Exemplare von $\mathfrak{e}$ an (die man gleichzeitig voneinander abhebt), so muß eine Fläche entstehen, deren Charakteristik nicht größer als $\chi(\mathfrak{F})$ sein kann, weil sich sonst wie zuvor ein Widerspruch zu den Annahmen über $\mathfrak{F}$ ergäbe. Damit folgt, daß $\mathfrak{F}'$ ein Elementarflächenstück ist. Ist $\mathfrak{F}'$ unzerlegt, so muß $\mathfrak{F}_2$ aus $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{e}$ bestehen und s die einzige Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sein, weil s andernfalls $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zugleich zerlegte, was wegen 3.4, (5) ausgeschlossen ist. Schaltet man s irregulär um, so erhält man eine charakteristische Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ und aus ihr durch Normalisieren eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

d) Es bleibt der Fall zu betrachten, daß sich $\mathfrak{F}'$ aus mehreren Teilen von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zusammensetzt. Wir nennen $\mathfrak{F}'$ das zu $\mathfrak{e}$ gehörige zerlegte Elementarflächenstück. Weil der 1. Fall ausgeschlossen ist, setzen sich die Teile von

$\mathfrak{F}'$ längs Querschnitten von $\mathfrak{F}'$ zusammen, und es gibt auf $\mathfrak{F}'$ ein unzerlegtes Elementarflächenstück. Wegen der Abschnitte b) und c) kann angenommen werden, daß es zu jedem zerlegten Elementarflächenstück ein unzerlegtes gibt. Man kann nun wie im Abschnitt d) des 1. Falles weiterschließen. Man erhält eine Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\chi(\tilde{\mathfrak{F}}) = \chi(\mathfrak{F})$. Der Rand von $\tilde{\mathfrak{F}}$ schneidet m in genau einem Punkte, weil m kein zerlegtes Elementarflächenstück trifft. Der Rand von $\tilde{\mathfrak{F}}$ besteht wieder nur aus einer Kurve, weil sich sonst wie zuvor ein Widerspruch zu den Annahmen über $\mathfrak{F}$ ergäbe. $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist also charakteristisch und führt auf eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

Damit ist auch der 2. Fall vollständig erledigt.

3. Fall. Es liegen weder der 1. noch der 2. Fall vor.

Wir stellen zunächst fest, daß $\chi(\mathfrak{F}_2) \leqq 0$ und daher $\chi(\mathfrak{F}_1) \geqq \chi(\mathfrak{F})$ ist. Wäre nämlich $\mathfrak{F}_2$ eine 2-Sphäre oder eine projektive Ebene, so müßte der 1. Fall vorliegen; wäre $\mathfrak{F}_2$ ein Elementarflächenstück, so müßte der 1. oder der 2. Fall vorliegen.

Ist nun $\mathfrak{F}_1$ orientierbar, so kann $\mathfrak{F}$ durch die einfachere Fläche $\mathfrak{F}_1$ ersetzt werden. $\mathfrak{F}_1$ kann nämlich nur eine Randkurve besitzen, weil sich sonst wie zuvor ein Widerspruch zu den Annahmen über $\mathfrak{F}$ ergäbe.

Sei jetzt $\mathfrak{F}_1$ nicht-orientierbar. Weil die Teile von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ orientiert sind, gibt es eine Schnittlinie s von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ derart, daß die beiden Ufer[16]) von s auf $\mathfrak{F}_1$ in unverträglicher Weise orientiert sind. Die beiden Ufer von s auf $\mathfrak{F}_2$ sind ebenfalls in unverträglicher Weise orientiert, weil sich bei regulärem Umschalten von s die Orientierung von $\mathfrak{F}$ ergibt. Wir schalten alle Schnitte außer s regulär um und s irregulär. Es entstehen eine oder zwei orientierte Flächen. Entsteht nur eine, so muß diese aus mehrfach erwähnten Gründen charakteristisch sein, und man erhält aus ihr durch Normalisieren eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$. Es mögen nun zwei Flächen $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$ entstehen. m schneide den Rand von $\tilde{\mathfrak{F}}$. Wie oben für $\mathfrak{F}_2$ folgt für $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$ nun $\chi(\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}) \leqq 0$. Damit ergibt sich wieder, daß $\tilde{\mathfrak{F}}$ charakteristisch sein muß, so daß man durch Normalisieren eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$ erhalten kann.

Damit ist die Reduktion für alle Fälle ausgeführt und der Beweis des Satzes in 5.1 beendet.

5.5. Flächen mit vorgegebenem Rand.

Satz. *Es sei M eine berandete, 3-dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit und $\dot{M}$ ihr Rand. C sei eine einfache geschlossene Kurve auf $\dot{M}$, die Unterkomplex einer gegebenen regulären Zellenzerlegung Σ von M ist. Es läßt sich entscheiden, ob C auf M orientierbare Flächen berandet. Ist dies der Fall, so läßt sich eine von C berandete, orientierbare Fläche maximaler Charakteristik aufweisen. Entsprechende Aussagen gelten, wenn orientierbare Flächen durch beliebige Flächen ersetzt werden.*

[16]) Ufer in lokalem Sinne. s kann orientierungsumkehrend, also einufrig sein.

Der Beweis ergibt sich aus dem Vorangehenden durch Vereinfachun
Weil C Unterkomplex von $\dot{M}$ bezüglich Σ ist, sind bei der Normalisierun
die den Rand betreffenden Schritte in 5.3 gegenstandslos (vgl. die Anmerkur
am Ende von 2.2). Bei der Reduktion ist in 5.4 für $\mathfrak{F}_1$ diejenige Fläche z
nehmen, die von C berandet wird. $\mathfrak{F}_2$ ist dann geschlossen, und der 2. Fa
ist gegenstandslos. Die Signifikanz ergibt sich entsprechend 5.2, wobei d
Bemerkung in 2.6 bezüglich des vorgegebenen Randes zu beachten ist.

§ 6. Die Primfaktorzerlegung von Verkettungen

6.1. Faktorzerlegung. Es sei V eine orientierte Verkettung in der S^3. Jede Komponente von V ist ein orientierter Polygonzug. Orientierte Knoten sind als spezielle orientierte Verkettungen aufzufassen. Es wird vorausgesetzt, daß V nicht zerfällt. Nach § 3 ist dies entscheidbar, wenn V gegeben ist. $\mathfrak{S}$ sei eine 2-Sphäre, die V in genau zwei Punkten schneidet und sonst nicht trifft (Fig. 17a). Weil die S^3 von $\mathfrak{S}$ zerlegt wird, liegen die beiden Schnitt

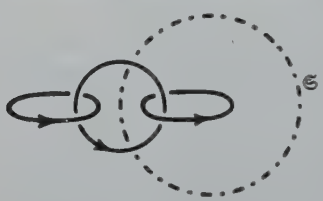

Fig. 17a

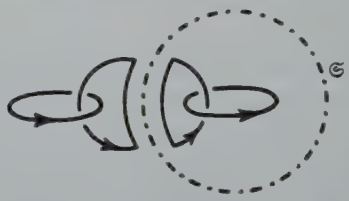

Fig. 17b

punkte A und B von V mit $\mathfrak{S}$ auf derselben Komponente von V. Sei k dies Komponente. w sei ein einfacher Weg auf $\mathfrak{S}$, der A und B verbindet. E ist unwesentlich, wie w gewählt wird, da je zwei solche Wege kombinatorisch isotop auf $\mathfrak{S}$ sind. k werde in A und B aufgeschnitten. An jeden der beide entstehenden Teile von k wird w mit passender Orientierung angefügt. Werde die beiden Exemplare von w nach verschiedenen Seiten von $\mathfrak{S}$ geeigne abgehoben, so entstehen zwei orientierte Verkettungen V_1 und V_2, die durch $\mathfrak{S}$ getrennt werden (Fig. 17b). Aus k ist dabei je eine Komponente k_1 bzw. k von V_1 bzw. V_2 entstanden. Durch V und $\mathfrak{S}$ sind V_1 und V_2 bis auf semilinear Äquivalenz bestimmt.

Wir sagen, daß V und $\mathfrak{S}$ eine Produktdarstellung von V bezüglich bilden oder daß V durch $\mathfrak{S}$ in die Faktoren V_1 und V_2 zerlegt wird. V heiß das Produkt von V_1 und V_2 bezüglich k_1 und k_2. Durch die Faktoren V_1, V_2 und die Angabe der Komponenten k_1, k_2 ist V bis auf semilineare Äquivalenz eindeutig bestimmt. Das Produkt heißt trivial, wenn V_1 oder V_2 ein (orientierter) Kreis ist. Entsprechend wird ein Faktor als trivial bezeichnet, wenn er ein Kreis ist. Ein Kreis läßt sich nur als triviales Produkt darstellen. Ist V kein Kreis und läßt sich V nur als triviales Produkt darstellen, so heiß V prim. Ist V nicht-triviales Produkt von V_1 und V_2 und ist etwa V_1 nicht prim, so kann V_1 weiter in nicht-trivialer Weise in Faktoren zerlegt werden. V ist dann als Produkt mehrerer nicht-trivialer Faktoren aufzufassen. Dies

Produktbildung ist assoziativ und kommutativ. Kreise fassen wir als leere Produkte von primen Verkettungen auf, prime Verkettungen als Produkte primer Verkettungen mit nur einem Faktor. In Verallgemeinerung des Sachverhaltes bei Knoten wurde von Y. Hashizume [2] bewiesen: Jede nicht-zerfallende, orientierte Verkettung V ist Produkt von endlich vielen primen Verkettungen, die durch V bis auf semilineare Äquivalenz eindeutig bestimmt sind. Umgekehrt ist V durch seine Primfaktoren und die Angabe, bezüglich welcher Komponentenpaare die Produkte zu bilden sind, bis auf semilineare Äquivalenz eindeutig bestimmt.

6.2. Satz. *In der S^3 sei eine nicht-zerfallende, orientierte Verkettung V gegeben. Die Primfaktorzerlegung von V kann aufgewiesen werden.*

Bezüglich der Vorgabe einer Verkettung in der S^3 gelten die Bemerkungen in 4.1.

Ist eine orientierte Verkettung V in der S^3 gegeben, so läßt sich wegen § 4 entscheiden, ob V zerfällt. Es kann also zunächst nachgeprüft werden, ob die Voraussetzung des Satzes erfüllt ist. Sei dies von nun an der Fall. Wegen § 5 läßt sich feststellen, ob V ein Kreis ist. Ist dies der Fall, so ist nichts weiter aufzuweisen. Wir können dies also im folgenden ausschließen.

Wir reduzieren zunächst die Behauptung des Satzes auf eine einfachere Aussage. Es sei k eine Komponente von V. Wir fragen, ob es eine nicht-triviale Produktdarstellung von V bezüglich k gibt. Liegt ein Verfahren vor, diese Frage zu entscheiden und bei positiver Antwort eine solche Produktdarstellung durch Angabe einer 2-Sphäre zu V aufzuweisen, so ergibt sich die Behauptung des Satzes folgendermaßen:

Man führe das Verfahren der Reihe nach für die verschiedenen Komponenten von V aus. Man findet entweder eine nicht-triviale Produktdarstellung von V auf, oder es ergibt sich, daß V prim ist. Ist eine 2-Sphäre $\mathfrak{S}$ aufgewiesen, die V in nur zwei Punkten schneidet und V als nicht-triviales Produkt darstellt, so bewirkt $\mathfrak{S}$ eine Unterteilung der vorhandenen Zellenzerlegung der S^3. Jeder der beiden durch $\mathfrak{S}$ aufgewiesenen Faktoren läßt sich als Unterkomplex der S^3 bezüglich der Unterteilung angeben. Damit ist das Verfahren auf die Faktoren erneut anwendbar, so daß man nach endlich vielen Wiederholungen zu den Primfaktoren von V gelangt.

Die Anzahl der erforderlichen Wiederholungen läßt sich übrigens von vornherein abschätzen, da man eine obere Schranke für die Anzahl der Primfaktoren angeben kann. Bezeichnet $m(V)$ die Anzahl der Komponenten von V und $g(V)$ das Geschlecht von V, so ist $m(V)+g(V)-1$ eine Invariante von V, die additiv bezüglich des Produktes ist. Sie ist außerdem nicht-negativ und nur dann Null, wenn V ein Kreis ist. $m(V)+g(V)-1$ ist also eine obere Schranke für die Anzahl der Primfaktoren von V. Liegt von V eine normierte Projektion vor, so läßt sich das Geschlecht nach oben abschätzen, indem man nach dem Verfahren von Seifert [7] orientierbare Flächen in V einspannt.

6.3. Beweisansatz. Sei weiterhin V eine orientierte Verkettung, die Unterkomplex einer gegebenen Zellenzerlegung der S^3 ist. V zerfalle nicht und sei kein Kreis. k sei eine Komponente von V. Nach dem Vorangehenden muß gezeigt werden: Ist V nicht-triviales Produkt bezüglich k, so läßt sich eine 2-Sphäre aufweisen, die V in zwei nicht-triviale Faktoren zerlegt.

Wir bohren nun V aus der S^3 aus, wodurch eine berandete Mannigfaltigkeit M entsteht. Vermöge der gegebenen Zellenzerlegung der S^3 und der Ränder der ausgebohrten Vollringe erhält man eine reguläre Zellenzerlegung Σ von M. $\mathfrak{V}$ sei unter den ausgebohrten Vollringen derjenige, der k zur Seele hat. $\mathfrak{T}$ sei der Rand von $\mathfrak{V}$. Beim Ausbohren von $\mathfrak{V}$ lassen sich zwei disjunkte Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}$ so aufweisen, daß sie k in nur je einem Punkte treffen und daß ihre Ränder Unterkomplexe von $\mathfrak{T}$ bezüglich Σ sind. m_1 und m_2 seien die Ränder von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$.

Ist $\mathfrak{S}$ irgendeine 2-Sphäre, die V in zwei Punkten von k schneidet und sonst nicht trifft, so läßt sich $\mathfrak{S}$ durch eine orientierungserhaltende semilineare Abbildung der S^3, die V auf sich abbildet, in eine 2-Sphäre überführen, die aus $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ und einem Kreisring auf M besteht[17]). Bis auf semilineare Äquivalenz erhält man also alle Faktorzerlegungen von V bezüglich k durch Kreisringe, die auf M liegen und von m_1 und m_2 berandet werden, indem man diese Kreisringe durch $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ zu 2-Sphären ergänzt. Es genügt daher, solche Kreisringe auf M zu betrachten. Von ihnen sagen wir weiterhin, daß sie V als Produkt darstellen. Eine solche Darstellung heißt nicht-trivial, wenn die entsprechende 2-Sphäre eine nicht-triviale Produktdarstellung von V ergibt.

Für M charakteristische Flächen seien nun Kreisringe auf M, die von m_1 und m_2 berandet werden und die V als nicht-triviales Produkt darstellen.

Durch das Vorangehende und durch 2.6 ist der Beweis des Satzes zurückgeführt auf den Beweis der Aussagen I, II und III von 2.6 (Normalisierung, Reduktion, Signifikanz).

6.4. Normalisierung. Wir nehmen an, daß es eine charakteristische Fläche $\mathfrak{F}$ gibt. Ihr Rand $\dot{\mathfrak{F}}$ ist Unterkomplex von $\mathfrak{T}$ bezüglich Σ. Daher sind die den Rand betreffenden Schritte in 2.2 gegenstandslos. Es muß nur nachgeprüft werden, daß der 7. Schritt ausführbar ist, denn alle übrigen sind Isotopien bei festem Rand.

Sei dazu $\mathfrak{g}$ ein Elementarflächenstück, dessen Rand s auf $\mathfrak{F}$ liegt und den Durchschnitt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{F}$ ausmacht. Schneidet man $\mathfrak{F}$ längs s auf und fügt man an die beiden entstehenden Randkurven je ein Exemplar von $\mathfrak{g}$ an (bei gleichzeitigem Abheben voneinander), so entsteht ein Flächensystem mit der Charakteristik 2 und den beiden Randkurven m_1 und m_2. Es ist ausgeschlossen, daß zwei Elementarflächenstücke entstehen, weil sonst jedes zusammen mit einer der beiden Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ eine 2-Sphäre bildete, die nur einen Schnittpunkt mit k besäße. Es liegen also eine 2-Sphäre $\mathfrak{R}$ und ein Kreisring $\tilde{\mathfrak{F}}$ vor. Lassen wir die beiden Exemplare von $\mathfrak{g}$ wieder zusammenfallen, so

[17]) Vgl. [5], § 3.

besteht $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{g}$ und einem Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{R}$ berandet in der S^3 eine Kugel $\mathfrak{M}$, die zu V disjunkt ist, weil V nicht zerfällt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{F}$ besteht aus $\mathfrak{f}$. Über $\mathfrak{M}$ hinweg läßt sich $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{g}$ deformieren[18]), wodurch $\mathfrak{F}$ in $\tilde{\mathfrak{F}}$ übergeht. Bis auf semilineare Äquivalenz stellen somit $\mathfrak{F}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ dieselbe Faktorzerlegung von V her, so daß wir $\mathfrak{F}$ durch $\tilde{\mathfrak{F}}$ ersetzen können. Dies ist gerade der Inhalt des 7. Schrittes. Die Normalisierung ist also ausführbar.

6.5. Reduktion. Wir nehmen an, daß es eine charakteristische Normalfläche $\mathfrak{F}$ gibt, die nicht fundamental ist. $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ sei ein erzeugendes Normalflächenpaar für $\mathfrak{F}$. Nehmen wir $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ zu $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ hinzu, so entstehen zwei geschlossene Flächen in der S^3. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ orientierbar sind. Außerdem muß eine der beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ geschlossen sein, etwa $\mathfrak{F}_2$, während die andere, also $\mathfrak{F}_1$, von m_1 und m_2 berandet wird. Entweder ist nun $\mathfrak{F}_1$ ein Torus mit zwei Löchern und $\mathfrak{F}_2$ eine 2-Sphäre, oder es ist $\mathfrak{F}_1$ ein Kreisring und $\mathfrak{F}_2$ ein Torus.

1. Fall. $\mathfrak{F}_2$ ist eine 2-Sphäre.

Wir zerschneiden $\mathfrak{F}_1$ längs sämtlicher Schnittlinien mit $\mathfrak{F}_2$. Unter den entstehenden Teilen von $\mathfrak{F}_1$ sei $\mathfrak{F}_1'$ derjenige, der m_1 im Rande enthält. Da $\mathfrak{F}_2$ von jeder Schnittlinie zerlegt wird, ist kein Teil von $\mathfrak{F}_1$ ein Elementarflächenstück (3.4, (5)). Hieraus folgt $\chi(\mathfrak{F}_1') \geqq -2$ wegen $\chi(\mathfrak{F}_1) = -2$.

Diejenigen Randkurven von $\mathfrak{F}_1'$, die auf $\mathfrak{F}_2$ liegen, kann man der Reihe nach durch Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{F}_2$ schließen, die man noch von $\mathfrak{F}_2$ abhebt. Nimmt man noch $\mathfrak{m}_1$ hinzu, so kann keine geschlossene Fläche entstehen, weil nur ein Schnittpunkt mit k vorhanden ist. Es folgt, daß auch m_2 zum Rande von $\mathfrak{F}_1'$ gehört.

Wegen $\chi(\mathfrak{F}_1') \geqq -2$ können nun höchstens zwei Randkurven von $\mathfrak{F}_1'$ auf $\mathfrak{F}_2$ liegen. Es müssen auch mindestens zwei sein, weil $\mathfrak{F}_1$ von keiner Schnittlinie allein zerlegt wird. Die beiden Randkurven von $\mathfrak{F}_1'$ auf $\mathfrak{F}_2$ gehören außerdem zu verschiedenen Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, weil andernfalls beim Aufschneiden von $\mathfrak{F}_1$ nur $\mathfrak{F}_1'$ entstanden wäre, während doch $\mathfrak{F}_2$ die S^3 zerlegt.

Es ergibt sich, daß $\mathfrak{F}_1'$ durch zwei disjunkte Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{F}_2$ zu einem Kreisring $\tilde{\mathfrak{F}}$ ergänzt werden kann. Nimmt man $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ und zu $\mathfrak{F}$ hinzu, so entstehen zwei 2-Sphären $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$. Im Durchschnitt von $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$ können $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ durch einen Weg auf $\mathfrak{F}_1'$ verbunden werden. Durch geringfügige Deformation von $\mathfrak{S}$ kann daher erreicht werden, daß der Durchschnitt von $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$ aus einem $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ umfassenden Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ und möglicherweise noch aus einfachen Schnittlinien besteht, die paarweise und zu $\mathfrak{n}$ disjunkt sind. Sind Schnittlinien vorhanden, so gibt es eine auf $\tilde{\mathfrak{S}}$ innerste, die auf $\tilde{\mathfrak{S}}$ ein Elementarflächenstück $\tilde{\mathfrak{f}}$ berandet, das $\mathfrak{n}$ und weitere Schnittlinien nicht enthält. Der Rand von $\tilde{\mathfrak{f}}$ schneidet aus $\mathfrak{S}$

[18]) Vgl. etwa [6], S. 138.

ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ aus, das $\mathfrak{n}$ nicht enthält. $\tilde{\mathfrak{f}}$ und $\mathfrak{f}$ bilden zusamme
eine 2-Sphäre, die in der S^3 eine zu V disjunkte Kugel $\mathfrak{M}$ berandet, weil $\mathfrak{N}$
nicht zerfällt. Man kann nun $\mathfrak{S}$ dadurch deformieren, daß man $\mathfrak{f}$ über $\mathfrak{N}$
hinweg in $\tilde{\mathfrak{f}}$ deformiert und anschließend so von $\tilde{\mathfrak{f}}$ abhebt, daß mindestens ein
Schnittlinie von $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ verschwunden ist. Auf diese Weise lassen sich all
Schnittlinien von $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ der Reihe nach beseitigen, so daß dann der Durch
schnitt von $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ nur noch aus $\mathfrak{n}$ besteht. Danach läßt sich durch ein
entsprechende Deformation erreichen, daß $\mathfrak{S}$ in $\tilde{\mathfrak{S}}$ übergeht. Es stellen als
$\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ und damit $\mathfrak{F}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ dieselbe Faktorzerlegung von V dar (bis au
semilineare Äquivalenz). Daher kann $\mathfrak{F}$ durch $\tilde{\mathfrak{F}}$ ersetzt werden. Gemäß 3.
erhält man aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ durch Normalisieren eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

2. Fall. $\mathfrak{F}_2$ ist ein Torus.

$\mathfrak{F}_1$ ist ein Kreisring, der zusammen mit $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ eine 2-Sphäre $\mathfrak{S}_1$ bildet
Jede Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zerlegt $\mathfrak{S}_1$ und damit auch $\mathfrak{F}_1$. Wegen 3.4, (5)
wird $\mathfrak{F}_2$ von keiner Schnittlinie zerlegt. $\mathfrak{F}_2$ bildet daher Kreisringe, die ab
wechselnd auf den beiden von $\mathfrak{S}_1$ in der S^3 berandeten Kugeln liegen. Unte
den Schnittlinien von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gibt es innerste auf $\mathfrak{S}_1$, d.h. solche, die au
$\mathfrak{S}_1$ jeweils ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück beranden
Ist unter diesen Elementarflächenstücken eines, das keinen Schnittpunkt mi
k enthält, so kann es keines geben, das mit k genau einen Schnittpunkt besitzt
weil sich sonst ein Kreisring auf $\mathfrak{F}_2$ und zwei Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{S}$
zu einer 2-Sphäre zusammensetzten, die nur einen Schnittpunkt mit k gemei
hätte. Damit folgt für die Schnitte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, daß entweder jeder aus $\mathfrak{F}$
ein Elementarflächenstück ausschneidet oder daß jeder $\mathfrak{F}_1$ in zwei Kreisringe
zerlegt.

Schneidet jede Schnittlinie aus $\mathfrak{F}_1$ ein Elementarflächenstück aus, so kann
man $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ durch einen Weg auf $\mathfrak{F}_1$ verbinden, der keine Schnittlinie
trifft. Nimmt man nun $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ auch zu $\mathfrak{F}$ hinzu, so erhält man eine 2-Sphäre
$\mathfrak{S}$, in deren Durchschnitt mit $\mathfrak{S}_1$ ein $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ umfassendes Elementarflächen
stück $\mathfrak{n}$ liegt. Wie im 1. Falle ergibt sich, daß $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}_1$ deformiert werde
kann. Es folgt, daß $\mathfrak{F}_1$ charakteristisch ist und an die Stelle von $\mathfrak{F}$ treten kann

Jede Schnittlinie von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zerlege nun $\mathfrak{F}_1$ in zwei Kreisringe. Ist $\mathfrak{F}$
charakteristisch, so kann $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}_1$ ersetzt werden. Sei dies jetzt nicht de
Fall. Dann berandet $\mathfrak{S}_1$ in der S^3 eine Kugel $\mathfrak{M}$, so daß der Durchschnitt
von V und $\mathfrak{M}$ eine unverknotete Sehne von $\mathfrak{M}$ ist. $\mathfrak{F}_2$ bildet auf $\mathfrak{M}$ Kreis
ringe. Sei $\mathfrak{r}_2$ ein solcher Kreisring, s_1 und s_2 seien seine beiden Ränder. s_1
und s_2 schneiden aus $\mathfrak{S}_1$ einen Kreisring $\mathfrak{r}_1$ aus, der auf $\mathfrak{F}_1$ liegt. Weil $\mathfrak{r}_2$ di
Sehne von $\mathfrak{M}$ nicht trifft und weil diese Sehne in $\mathfrak{M}$ unverknotet ist, berande
$\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ zusammen einen unverknoteten Vollring $\mathfrak{W}$, der auf $\mathfrak{M}$ liegt und s_1
und s_2 als Breitenkreise besitzt[19]). Liegen auf $\mathfrak{W}$ noch weitere Kreisringe
von $\mathfrak{F}_2$, so schneiden diese von $\mathfrak{W}$ Vollringe gleicher Art ab. Es kann dahe
angenommen werden, daß $\mathfrak{r}_2$ so gewählt ist, daß $\mathfrak{r}_2$ den Durchschnitt von $\mathfrak{W}$

[19]) [6], § 8.

und $\mathfrak{F}_2$ ausmacht. Wenn wir die Schnittlinien s_1 und s_2 regulär umschalten, so wird $\mathfrak{r}_1$ nicht mit beiden Rändern an die an $\mathfrak{r}_2$ anstoßenden Teile von $\mathfrak{F}_2$ angeheftet, weil sonst im Widerspruch zu 3.4, (4) noch immer zwei Flächen vorhanden wären (Fig. 18a, b zeigt den Sachverhalt im Schnitt). Es können auch nicht $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ mit beiden Rändern zusammengeheftet werden. Bei irregulärem Umschalten von s_1 und s_2 werden vielmehr $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ längs einer Schnittlinie, etwa längs s_1, zusammengeheftet, dagegen nicht längs der anderen s_2 (Fig. 18c). Wir schalten nun alle Schnitte von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ außer s_2 regulär

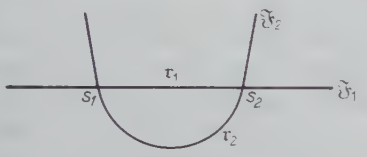

Fig. 18a

Fig. 18b

Fig. 18c

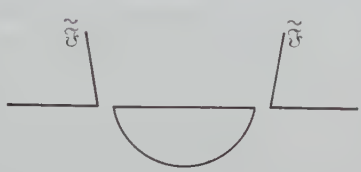

Fig. 18d

um und s_2 irregulär. Dabei entsteht ein aus $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ bestehender Torus und ein Kreisring $\tilde{\mathfrak{F}}$ (Fig. 18d). Weil $\mathfrak{W}$ ein Vollring ist, für den s_2 ein Breitenkreis ist, kann $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{W}$ hinweg in $\tilde{\mathfrak{F}}$ deformiert werden[20]) (vgl. Fig. 18c und d). Daher ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ charakteristisch, und durch Normalisieren gemäß 3.5 entsteht eine einfachere Fläche als $\mathfrak{F}$.

Die Reduktion ist also in allen Fällen ausführbar.

6.6. Signifikanz. Die Signifikanz ergibt sich hier aus einem bereits vorhandenen Entscheidungsverfahren. Für einen repräsentativen Vorrat von Fundamentalflächen kann zunächst festgestellt werden, welche Flächen von m_1 und m_2 berandete Kreisringe sind[21]). Ist $\mathfrak{r}$ ein solcher Kreisring, so bildet er zusammen mit $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ eine 2-Sphäre $\mathfrak{S}$, welche die S^3 in zwei Kugeln zerlegt. Es kann abgelesen werden, ob der Durchschnitt von V mit einer solchen Kugel nur aus einer Sehne besteht. Ist dies für beide Kugeln nicht der Fall, so ist $\mathfrak{r}$ charakteristisch. Besteht der Durchschnitt von V mit einer von $\mathfrak{S}$ berandeten Kugel nur aus einer Sehne, so kann diese durch einen Weg auf $\mathfrak{S}$ zu einem Knoten ergänzt werden. Dies kann so geschehen, daß der Knoten Unterkomplex der S^3 bezüglich einer Zellenzerlegung ist, die durch Unterteilung von Σ' vermöge $\mathfrak{S}$ entsteht. Wegen 5.1 kann dann entschieden werden, ob dieser Knoten ein Kreis ist. Besteht V nur aus einem einzigen Knoten, so ist diese Entscheidung für beide durch $\mathfrak{S}$ aufgewiesenen Faktoren

[20]) [6], § 8.

[21]) Man beachte die Bemerkung über den Rand in 2.6.

zu treffen. Jedenfalls ergibt sich auf endliche Weise, ob $\mathfrak{r}$ charakteristisch ist oder nicht. Damit ist der Satz in 6.2 bewiesen.

6.7. Anmerkung. Das Verfahren läßt sich so anlegen, daß die Frage nach nicht-trivialen Produktdarstellungen von V für alle Komponenten zugleich beantwortet wird. Man hat nur für jeden aus der S^3 ausgebohrten Vollring zwei Meridianflächen anzugeben. Wir haben hierauf verzichtet, um zusätzliche Bezeichnungen zu vermeiden.

Der Satz kann auch noch auf eine andere Weise bewiesen werden, bei der jeweils in Evidenz gesetzt ist, ob eine triviale Faktorzerlegung von V vorliegt oder nicht. Dabei scheint die Auszeichnung einer Komponente k von V wesentlich zu sein. Man kann zunächst eine orientierbare Fläche $\mathfrak{G}$ bestimmen, die von maximaler Charakteristik unter denjenigen orientierbaren Flächen ist, die von k und anderen Komponenten von V berandet werden und deren Durchschnitt mit V nur aus Randkurven besteht (es brauchen nicht alle Komponenten von V erfaßt zu werden). Eine 2-Sphäre $\mathfrak{S}$, die eine Faktorzerlegung von V bezüglich k angibt, kann immer so deformiert werden, daß ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{G}$ aus einem einzigen Querschnitt besteht. Danach ist die Faktorzerlegung genau dann trivial, wenn $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ein Elementarflächenstück so abschneidet, daß ein Randbogen dieses Elementarflächenstückes den Durchschnitt von V mit einer von $\mathfrak{S}$ berandeten Kugel ausmacht. Um ein Bestimmungsverfahren zu erhalten, schneidet man die S^3 längs $\mathfrak{G}$ auf und bohrt die durch $\mathfrak{G}$ nicht erfaßten Komponenten aus der S^3 aus. Die charakteristischen Flächen sind dann spezielle Elementarflächenstücke.

Literatur

[1] Haken, W.: Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten. Erscheint in Acta Math.
[2] Hashizume, Y.: On the uniqueness of the decomposition of a link. Osaka Math. J. **10**, 283–300 (1958).
[3] Papakyriakopoulos, C. D.: On the ends of the fundamental groups of 3-manifolds with boundary. Comm. Math. Helv. **32**, 85–92 (1957).
[4] Papakyriakopoulos, C. D.: On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann. Math. **66**, 1–26 (1957).
[5] Schubert, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. **1949**.
[6] Schubert, H.: Knoten und Vollringe. Acta math., Stockh. **90**, 131–286 (1953).
[7] Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571–592 (1935).

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 10. September 1960)

Loonstra, F.
Math. Zeitschr. 76, 149—154 (1961)

Darstellungen von Gruppen als homomorphes Bild

Von

F. Loonstra

§ 1. Einleitung

Die Möglichkeit, eine feste Gruppe B als homomorphes Bild einer Gruppe G mit Hilfe eines Homomorphismus α zu beschreiben, liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde. Wir nennen $G(\alpha)$ eine *Projektionsdarstellung* (kurz: Darstellung) der Gruppe B als homomorphes Bild, wenn es eine homomorphe Abbildung α von G auf B gibt. Wir untersuchen zuerst die Gesamtheit aller möglichen Darstellungen $G(\alpha)$ von B, und dazu werden[1]) folgende Definitionen eingeführt:

1. Es gibt eine *Ordnungsrelation:*

$G(\alpha) \leqq G'(\alpha')$, wenn es eine homomorphe Abbildung η gibt

$$\eta: \quad G' \to G, \text{ so daß } \alpha' = \eta\,\alpha.$$

Die Ordnungsrelation ist transitiv.

2. Zwei Darstellungen $G(\alpha)$ und $G'(\alpha')$ sind *verwandt*, wenn zugleich

$$G(\alpha) \leqq G'(\alpha') \quad \text{und} \quad G'(\alpha') \leqq G(\alpha),$$

d.h. wenn es *verbindende Homomorphismen* η, η' gibt

$$\eta: \quad G' \to G \quad \text{mit} \quad \alpha' = \eta\,\alpha,$$
$$\eta': \quad G \to G' \quad \text{mit} \quad \alpha = \eta'\,\alpha'.$$

Die Verwandtschaft von Darstellungen ist eine Äquivalenzrelation und bewirkt also eine Einteilung der Gesamtheit aller Darstellungen $G(\alpha)$ von B in Klassen $\{G(\alpha)\}$ von untereinander äquivalenten Darstellungen. Die Gesamtheit der Klassen verwandter Darstellungen ist im allgemeinen keine Menge! Sei $G(\alpha)$ eine Darstellung von B, H irgendeine Gruppe, so ist z.B. das direkte Produkt $(G \times H)$ (β) mit $(g, h)\,\beta = g\,\alpha$ eine mit $G(\alpha)$ verwandte Darstellung von B.

3. Sind $G_1(\alpha_1)$ und $G_2(\alpha_2)$ zwei Darstellungen von B, so ist das *Produkt* dieser Darstellungen das *vollständige B-subdirekte Produkt*[2])

$$G(\alpha) = G_1(\alpha_1) \,\tilde{\times}\, G_2(\alpha_2);$$

[1]) Loonstra, F.; Klassifikation der Darstellungen einer Gruppe. Acta Math. Acad. sc. Hungaricae **11**, 223—229, (1960).

[2]) Herr Wielandt hat vorgeschlagen, die Bezeichnung „meromorphes subdirektes Produkt" zu ändern und zu sprechen von einem vollständigen B-subdirekten Produkt.

$G(\alpha)$ ist die Gruppe derjenigen Paare $g=(g_1, g_2)$, $g_i \in G_i$ mit $g_1 \alpha_1 = g_2 \alpha_2$; $(g_1, g_2)\alpha = g_1 \alpha_1$. Allgemein: Sei M eine bestimmte Menge von Darstellungen $G_i(\alpha_i)$ von B, so ist das vollständige B-subdirekte Produkt

$$\tilde{\times}_i G_i(\alpha_i) = G(\alpha)$$

die Untergruppe G des vollständigen direkten Produktes $\{\times_i G_i\}^*$ derjenigen Systeme $g=(\ldots, g_i, \ldots, g_j, \ldots)$ mit $g_i \alpha_i = g_j \alpha_j$, wenn $i \neq j$ und $g\alpha = g_i \alpha_i$.

Man beweist leicht, daß die Klasse des Produktes nur durch die Klassen der Faktoren bestimmt wird. Es sei nun erwähnt, daß die Gesamtheit der Klassen von untereinander verwandten Darstellungen eine kleinste Klasse enthält; das ist die Klasse der *identischen* Darstellung $B(\varepsilon)$ von B, wenn mit ε die identische Abbildung von B auf sich bezeichnet wird.

Hinsichtlich der Ordnung der Klassen $\{G(\alpha)\}$ können wir folgendes sagen:

Wenn M eine bestimmte Menge von Darstellungen $G_i(\alpha_i)$ von B ist, so gilt

$$G_i(\alpha_i) \leqq G(\alpha) = \tilde{\times}_i G_i(\alpha_i),$$

und überdies: wenn für eine Darstellung $H(\beta)$ von B gilt, daß

$$G_i(\alpha_i) \leqq H(\beta) \quad \text{für jedes } G_i(\alpha_i) \in M,$$

so gilt auch

$$G(\alpha) = \tilde{\times}_i G_i(\alpha_i) \leqq H(\beta);$$

es hat also das vollständige B-subdirekte Produkt $\tilde{\times}_i G_i(\alpha_i)$ die Eigenschaften der kleinsten oberen Schranke der Darstellungen von M. Man beweist leicht, daß das freie Produkt

$$F(\beta) = *_i G_i(\alpha) \tag{1}$$

mit

$$f\beta = (g_{i_1} \cdot g_{i_2} \cdot \cdots \cdot g_{i_n})\beta = (g_{i_1}\alpha_{i_1}) \cdot \cdots \cdot (g_{i_n}\alpha_{i_n})$$

alle Eigenschaften der größten unteren Schranke besitzt: es ist $F(\beta) \leqq G_i(\alpha_i)$ für alle $G_i(\alpha_i) \in M$ und aus $H(\beta') \leqq G_i(\alpha_i)$ für alle $G_i(\alpha_i)$ folgt $H(\beta') \leqq F(\beta)$. Wir bezeichnen die Gesamtheit aller Klassen von untereinander verwandten Darstellungen $G(\alpha)$ von B mit $V(B)$ und wir sprechen von dem Pseudoverband $V(B)$.

§ 2. Das Problem der Zerlegung

Es sei $B = \times_i C_i$, d.h. B sei das (diskrete) direkte Produkt der Gruppen C_i. Zu jeder Komponente C_i gehört (ebenso wie zu B) ein Pseudoverband $V(C_i)$ der Klassen von Darstellungen von C_i, und wir fragen nach dem Zusammenhang zwischen den Pseudoverbänden $V(B)$ und $V(C_i)$ von B und den direkten Faktoren C_i.

Jede Darstellung $G(\alpha)$ von B induziert auf eine natürliche Weise eine Darstellung $H_i(\beta_i)$ eines direkten Faktors C_i von B; es ist H_i das vollständige

)riginal von C_i in G (hinsichtlich der Abbildung α) und

$$h_i\beta_i = h_i\alpha = c_i \in C_i;$$

$I_i(\beta_i)$ enthält den Kern K_α der Abbildung α von G auf B und

$$H_i \cap H_j = K_\alpha \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Satz I. *Wenn für die Darstellungen $G_1(\alpha_1)$ und $G_2(\alpha_2)$ von B gilt, daß $G_1(\alpha_1) \leqq G_2(\alpha_2)$, so gilt auch für die induzierten Darstellungen $H_1(\beta_1)$ und $H_2(\beta_2)$ eines direkten Faktors C von B: $H_1(\beta_1) \leqq H_2(\beta_2)$.*

Es gibt einen Homomorphismus η: $G_2 \to G_1$ mit $\eta\,\alpha_1 = \alpha_2$. Die Abbildung η nduziert eine homomorphe Abbildung von H_2 in G_1; aus $h_2\beta_2 = h_2\alpha_2$ ($h_2 \in H_2$) nd $h_2\eta\,\alpha_1 = h_2\alpha_2 = h_2\beta_2$ folgt, daß $h_2\eta$ dem vollständigen Original von C n G_1 (hinsichtlich α_1) zugehört, d.h. $h_2\eta \in H_1$; η induziert also einen Homo-norphismus $\bar{\eta}$: $H_2 \to H_1$ mit $\bar{\eta}\,\beta_1 = \beta_2$. Es ist also $H_1(\beta_1) \leqq H_2(\beta_2)$.

Aus Satz I folgen sofort

Satz II. *Verwandte Darstellungen $G_1(\alpha_1)$ und $G_2(\alpha_2)$ von B induzieren verwandte Darstellungen $H_1(\beta_1)$ und $H_2(\beta_2)$ eines direkten Faktors C von B.*

Satz III. *Induzieren die Darstellungen $G(\alpha)$ und $G'(\alpha')$ von B die Darstellungen $H(\beta)$ und $H'(\beta')$ eines direkten Faktors C von B, so induziert die Klasse $\{G(\alpha) \times G'(\alpha')\}$ die Klasse $\{H(\beta) \times H'(\beta')\}$, und die Klasse $\{G(\alpha) * G'(\alpha')\}$ induziert die Klasse $\{H(\beta) * H'(\beta')\}$.*

Wenn umgekehrt eine Darstellung $H(\beta)$ von C, gegeben ist, so ist auch ine Darstellung $G(\alpha)$ von B zu bestimmen, welche genau $H(\beta)$ als Darellung von C_i induziert. Definiert man nämlich

5) $$G(\alpha) = \Big\{H \times \Big(\underset{j \neq i}{\times} C_j\Big)\Big\}(\alpha)$$

nd für $g = h \cdot c_{j_1} \cdot c_{j_2} \cdot \cdots \cdot c_{j_n}$

$$g\,\alpha = (h\,\beta) \cdot c_{j_1} \cdot \cdots \cdot c_{j_n} \quad (c_{j_k} \in C_{j_k}),$$

o ist zuerst $G(\alpha)$ eine Darstellung von B und diese Darstellung $G(\alpha)$ induziert ür die Komponente C_i von B genau die Darstellung $H(\beta)$; man hat ja die Elemente $g \in G$ zur Verfügung mit $g\,\alpha \in C_i$, das sind genau diejenigen Elemente

$$g = h \cdot c_{j_1} \cdot c_{j_2} \cdot \cdots \cdot c_{j_n} \qquad (c_{j_k} \in C_{j_k} \neq C_i)$$

nit allen $c_{j_k} = e_{j_k}$, und das sind die Elemente von H. Jede Darstellung $G(\alpha)$ on B induziert also auf eine natürliche Weise Darstellungen $H_i(\beta_i)$ der irekten Faktoren C_i von B und umgekehrt; für jede Darstellung $H_i(\beta_i)$ es direkten Faktors C_i von B ist immer eine Darstellung $G(\alpha)$ von B zu estimmen, welche $H_i(\beta_i)$ induziert.

Satz IV. *Sind $H_1(\beta_1)$ und $H_2(\beta_2)$ Darstellungen eines direkten Faktors C on B und ist $H_1(\beta_1) \leqq H_2(\beta_2)$, so gilt auch für die induzierten Darstellungen* 5) *von B: $G_1(\alpha_1) \leqq G_2(\alpha_2)$.*

BEWEIS. Es sind $G_1(\alpha_1)=\{H_1\times(\underset{i}{\times}C_i)\}(\alpha_1)$, $G_2(\alpha_2)=\{H_2\times(\underset{i}{\times}C_i)\}(\alpha_2$ $C_i\neq C$, die induzierten Darstellungen; für die Elemente

$$g_1=h_1c_{i_1}\cdot c_{i_2}\cdot\cdots\cdot c_{i_n},\qquad g_2=h_2\cdot c_{i_1}\cdot c_{i_2}\cdot\cdots\cdot c_{i_n}$$

gilt

$$g_1\alpha_1=(h_1\beta_1)\cdot c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n},\qquad g_2\alpha_2=(h_2\beta_2)\cdot c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n}.$$

Weiter gibt es einen Homomorphismus η: $H_2\to H_1$, $\eta\beta_1=\beta_2$. Wir definiere nun den folgenden Homomorphismus

$$\xi:\quad g_2\xi=(h_2c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n})\xi=(h_2\eta)\cdot c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n}.$$

Es ist also

$$\xi:\quad G_2\to G_1$$

und

$$g_2\xi\alpha_1=(h_2\eta\beta_1)\cdot c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n}=(h_2\beta_2)\cdot c_{i_1}\cdot\cdots\cdot c_{i_n}=g_2\alpha_2,$$

also

$$\xi\alpha_1=\alpha_2,$$

d.h.

$$G_1(\alpha_1)\leqq G_2(\alpha_2).$$

Daraus folgen:

SATZ V. *Sind $H_1(\beta_1)$ und $H_2(\beta_2)$ verwandte Darstellungen eines direkte Faktors C von B, so sind die induzierten Darstellungen* (5) *von B auch verwand*

SATZ VI. *Induzieren die Darstellungen $H(\beta)$ und $H'(\beta')$ eines direkte Faktors C von B die Darstellungen $G(\alpha)$ und $G'(\alpha')$ von B, so induziert d Klasse der Darstellung $H(\beta)\,\tilde{\times}\,H'(\beta')$ (bzw. $H(\beta)*H'(\beta')$) die Klasse der Da stellung $G(\alpha)\,\tilde{\times}\,G'(\alpha')$ (bzw. $G(\alpha)*G'(\alpha')$) von B.*

Die Abbildung Φ, welche einer Darstellung $G(\alpha)$ von B die induziert Darstellung $H(\beta)$ eines direkten Faktors C von B zuordnet, ist also eine ve bandshomomorphe Abbildung von dem Pseudoverband $V(B)$ auf den Pseud verband $V(C)$. Außerdem enthält $V(B)$ einen Teilpseudoverband $V^*(C)$, de man verbandsisomorph auf den Pseudoverband $V(C)$ eines direkten Faktors von B abbilden kann (für jede direkte Komponente C von B) und derar daß der Durchschnitt (bzw. Vereinigung) der Klassen in $V^*(C)$ mit dem en sprechenden Durchschnitt (bzw. Vereinigung) derselben Darstellungen in $V(B$ übereinstimmt.

Es bleibt nun noch die Frage: Wie hängt der Pseudoverband $V(B)$ ab vo den Pseudoverbänden $V(C_i)$ der direkten Faktoren C_i von B?

Es sei $G(\alpha)$ eine Darstellung von B und $H_i(\beta_i)$ die von $G(\alpha)$ induzierte Darstellungen der direkten Faktoren C_i von B; es gilt

$$H_i\cap H_j=K_\alpha\quad\text{für}\quad i\neq j,$$

wenn mit K_α der Kern der Abbildung α von G auf B bezeichnet wird. W bilden nun mit Hilfe der so gebildeten Darstellungen $H_i(\beta_i)$ das (verallgeme nerte) freie Produkt

$$F(\alpha)=\{\underset{i}{*}H_i(\beta_i)\,|\,K_\alpha\}(\alpha)$$

er $H_i(\beta_i)$ mit der vereinigten Untergruppe K_α. In diesem kann man die lemente in einer Normalform schreiben. In jeder Gruppe $H_i(\beta_i)$ wählt man in Repräsentantensystem $\{h_i\}$ der Nebenklassen modulo K_α; jedes Element $\in H_i(\beta_i)$ hat dann eine eindeutige Darstellung $h = h_i \cdot k$ $(h_i \in \{h_i\},\ k \in K_\alpha)$. abei nehmen wir an, daß das Einselement $e_i \in \{h_i\}$, also K_α wird durch das inselement repräsentiert. Es sind dann die Elemente des freien Produktes (α) zu schreiben als

$$f = h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdot \cdots \cdot h_{i_n} \cdot k,$$

daß

1. jede Komponente h_{i_j} $(1 \leqq j \leqq n)$ ein Element $(\neq e)$ eines Repräsentantensystems $\{h_{i_j}\}$ ist;
2. aufeinanderfolgende Komponenten h_{i_j} aus verschiedenen Repräsentantensystemen sind;
3. die letzte Komponente in der gemeinsamen Untergruppe K_α liegt;
4. $f\alpha = (h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdot \cdots \cdot h_{i_n} \cdot k)\,\alpha = (h_{i_1}\beta_{i_1}) \cdots (h_{i_n}\beta_{i_n})$.

Es läßt sich leicht beweisen, daß $F(\alpha)$ eine Darstellung von B ist, daß die Darstellung $F(\alpha)$ von B die Darstellungen $H_i(\beta_i)$ von C_i induziert, und daß außerdem $F(\gamma) \approx G(\alpha)$.

Wenn nun umgekehrt *irgendein* System von Darstellungen $H_i(\beta_i)$ von den direkten Faktoren C_i von B gegeben sei, so kann man die letzte Methode nicht ohne weiteres anwenden.

Wir bezeichnen mit K_{β_i} den Kern der Abbildung β_i von $H_i(\beta_i)$ auf C_i. In § 1 (2.) haben wir schon bemerkt, daß mit $H_i(\beta_i)$ auch ein direktes Produkt

$$H_i'(\beta_i') = \{H_i(\beta_i) \times (\underset{j \neq i}{\times} K_{\beta_j})\}\,(\beta_i')$$

mit

$$(h_i k_{\beta_1} k_{\beta_2} \ldots k_{\beta_n})\,\beta_i' = h_i \beta_i \in C_i$$

eine Darstellung von C_i ist und außerdem, daß $H_i(\beta_i)$ und $H_i'(\beta_i')$ verwandte Darstellungen sind. Wenn wir nun für jede Darstellung $H_i(\beta_i)$ die entsprechende Darstellung $H_i'(\beta_i')$ bilden, so tritt für die $H_i'(\beta_i')$ genau der Fall auf, daß die $H_i'(\beta')$ Darstellungen von C_i sind und daß

$$H_i' \cap H_j' = \underset{i}{\times} K_{\beta_i} = K.$$

Wir können also auf analoge Weise das (verallgemeinerte) freie Produkt der $H_i'(\beta_i')$ mit der vereinigten Untergruppe $K = \underset{i}{\times} K_{\beta_i}$ bilden und es entsteht eine Darstellung $G(\alpha)$ von B, welche genau die $H_i'(\beta_i')$ als Darstellungen von den direkten Faktoren C_i von B induziert.

Da man jede Darstellung $G(\alpha)$ von B auf diese Weise bekommt, hat man folgendes Resultat:

Satz VII. *Jede Darstellung $G(\alpha)$ von B bestimmt auf eindeutige Weise ein System von Darstellungen $H_i(\beta_i)$ der direkten Faktoren C_i von B. Umgekehrt kann man mit Hilfe irgendeines Systems von Darstellungen $H_i(\beta_i)$ der direkten*

Faktoren C_i von B durch Übergang auf gewisse verwandte Darstellungen $H_i'(\beta$ von C_i erreichen, daß die entstehenden Darstellungen $H_i'(\beta_i')$ einen gemeinsam Kern K besitzen. Das freie Produkt der $H_i'(\beta_i')$ mit der vereinigten Untergruppe liefert dann eine Darstellung $G(\alpha)$ von B, die umgekehrt genau die Klassen d ursprünglichen Darstellungen $H_i(\beta_i)$ bestimmt.

Zum Schluß beweisen wir den

Satz VIII. *Der Pseudoverband $V(B)$ ist das kardinalgeordnete Produkt d Pseudoverbände $V(C_i)$ der Faktoren C_i von B.*

Beweis. Es gibt eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Systeme von Klassen

$$[\ldots, \{H_i(\beta_i)\}, \ldots],$$

wo $H_i(\beta_i)$ eine Darstellung von C_i bezeichnet, und den Darstellungen

$$G(\alpha) = \{\times_i H_i\}(\alpha)$$

von B mit

$$g\alpha = (h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_n})\alpha = (h_{i_1}\beta_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (h_{i_n}\beta_{i_n}) \in B.$$

Wenn für die Komponentendarstellungen gilt $H_i(\beta_i) \leqq H_i'(\beta_i')$, so gilt auch fü $G(\alpha) = (\times_i H_i)(\alpha)$ und $G'(\alpha') = (\times_i H_i')(\alpha')$:

$$G(\alpha) \leqq G'(\alpha')$$

und umgekehrt! Da man jede Darstellung $G(\alpha)$ von B auf diese Weise b kommt, ist $V(B)$ das kardinalgeordnete Produkt der Pseudoverbände $V(C$ der direkten Faktoren C_i von B.

Technische Hogeschool, Delft

(Eingegangen am 11. April 1960)

ANDRÉ, J.
Math. Zeitschr. 76, 155—163 (1961)

Über Parallelstrukturen*)

Teil II: Translationsstrukturen

Von

JOHANNES ANDRÉ

Einleitung

Nachdem in Teil I dieser Arbeit[1]) die allgemeine Theorie der Parallelstrukturen entwickelt wurde, wenden wir uns jetzt speziellen Strukturen zu. Fordern wir von einer affinen Parallelstruktur, daß deren Translationsgruppe transitiv auf ihren Punkten ist, so kommt man zum Begriff der Translationsstruktur. Die Theorie dieser Strukturen wird ganz analog entwickelt wie in ANDRÉ (1954, a) [s. auch ANDRÉ (1954, b)] die der Translationsebenen (welche man kennzeichnen kann als Translationsstrukturen, die gleichzeitig affine Ebenen sind). Diejenigen Translationen, die eine feste Gerade in sich überführen, bilden eine Untergruppe der vollen Translationsgruppe T. Man betrachtet nun die zu jeder Geraden eines festen Büschels auf diese Weise gewonnene Untergruppe. Die Menge der so erhaltenen Untergruppen ist eine Partition von T, d.h. alle diese Untergruppen überdecken T, und je zwei verschiedene Untergruppen haben nur das neutrale Element gemeinsam. Umgekehrt erhält man aus einer Partition einer Gruppe eine Translationsstruktur, indem man als Punkte die Gruppenelemente und als Geraden die Rechtsrestklassen der Partitionenuntergruppen nimmt. Die Beweise hierfür stehen in §1.

Wichtig für die beiden weiteren Teile dieser Arbeit (zu deren Vorbereitung Teil II im wesentlichen dient) sind die Translationsstrukturen mit abelscher Translationsgruppe. Wie in §2 gezeigt wird, ist damit gleichbedeutend, daß jede Translation zentral ist, d.h. mit einer Geraden auch die zu ihr parallelen festläßt. Strukturen dieser Art nennen wir zentrale Translationsstrukturen (z.T.). Nach einer kleinen gruppentheoretischen Anwendung in §3 bringt §4 Untersuchungen über die Streckungsgruppe einer Translationsstruktur. Sie hängt eng zusammen mit der Menge aller derjenigen Endomorphismen der Translationsgruppe, welche jede Untergruppe der zur Struktur gehörenden Partition in sich abbildet; diese Menge heißt der Kern der Translationsstruktur. Die Streckungen bestehen aus genau denjenigen Kernelementen, die ein Inverses besitzen (Satz 4.2). Der Kern einer z.T. kann in natürlicher Weise als nullteilerfreier Ring mit Einselement aufgefaßt werden (Satz 4.3). Schließlich wird (in Satz 4.6) eine hinreichende Bedingung für einen Ring angegeben, damit er als Kern einer geeigneten z.T. aufgefaßt werden kann.

*) Teil einer von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift.

[1]) Teil I erschienen in Math. Z. **76**, 85—102 (1961), im folgenden hier mit I zitiert.

§ 1. Zusammenhang mit den Gruppenpartitionen

1. DEFINITION. Eine *Translationsstruktur* $t=(T, \mathfrak{L})$ (bezüglich einer Tran lationsgruppe T[2])) ist eine affine Parallelstruktur (a.P.) mit den beiden fo genden zusätzlichen Eigenschaften:

(t 1) *Es gibt eine auf den Punkten von t transitive Gruppe* T *von Tran lationen.*

(t 2) *Jede Gerade von t enthält mindestens zwei Punkte.*

BEMERKUNG. Das zweite Axiom ist eine Verschärfung des Reichhaltig keitsaxiomes (a 4) für a.P.

Jede Gerade G einer Translationsstruktur ist Fixgerade mindestens eine nichtidentischen Translation. Nach (t 2) enthält nämlich G zwei Punkte p, q es kann also $G=\langle p, q\rangle$ gesetzt werden. Aus (t 1) folgt die Existenz eine Translation $\tau(\in\mathsf{T})$ mit $p^\tau=q$. Wegen $G^\tau \| G$ folgt nun $G^\tau=G$. Allgemeiner Parallelstrukturen mit dieser Eigenschaft werden in Teil IV näher untersuch

Es ist nicht bekannt, ob es eine Translationsstruktur t bezüglich mehrere Translationsgruppen gibt, m.a.W. ob die Gruppe der axialen Kollineatione von $t=(T, \mathfrak{L})$ mehr als *eine* auf T transitive Translationsgruppe enthält. Die ist jedenfalls nicht möglich, wenn alle Translationen von t eine Gruppe bilde was sofort aus I, Satz 4.3 folgt. Offensichtlich gilt

SATZ 1.1. *Eine a.P. mit Axiom* (t 2), *in der die Translationen eine Gruppe bilden, ist genau dann eine Translationsstruktur, wenn* T *transitiv auf ihre Punkten ist.*

Hieraus und aus I, Satz 5.3 (b) schließt man:

SATZ 1.2. *Eine endliche a.P. mit Axiom* (t 2) *ist genau dann eine Tran lationsstruktur, wenn die Gruppe* Π *ihrer affin-axialen Kollineationen transit auf ihren Punkten ist.*

2. Man gewinnt Translationsstrukturen durch sog. Gruppenpartitione ganz entsprechend wie man Translationsebenen durch Kongruenzen erhalte kann [ANDRÉ (1954, a), §§ 2, 3; PICKERT (1955), S. 199—201]. Sei T ei (abstrakte) Gruppe, deren Verknüpfung wir *additiv* schreiben und deren ne trales Element wir mit o bezeichnen wollen. Eine Menge $\mathfrak{P}$ aus *eigentliche* (d.h. von o und T verschiedenen) Untergruppen von T nennen wir ei *Partition* [s. YOUNG (1927)] auf T, wenn die Untergruppen aus $\mathfrak{P}$ ganz überdecken und je zwei verschiedene von ihnen nur das neutrale Eleme gemeinsam haben. Wir sagen, T sei die *Trägergruppe* (oder kurz der *Träge* der Partition $\mathfrak{P}$. Jedes von o verschiedene $t\in T$ liegt in genau einer Unte gruppe aus $\mathfrak{P}$, die wir mit U_t bezeichnen.

[2]) Wir benutzen hier eine gegenüber I etwas geänderte Bezeichnung: Hier ist T ste eine Gruppe, während in I mit T die Menge *aller* Translationen (von der nicht allgeme bekannt ist, ob sie eine Gruppe bildet) bezeichnet war. — Ferner werden hier mit Rüc sicht auf die Teile III und IV die Punkt- bzw. Geradenmenge mit T bzw. $\mathfrak{L}$ anstatt m P bzw. $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

Wir können auf folgende Weise aus einer Partition $\mathfrak{P}$ einer Gruppe T eine Translationsstruktur $t=[T, \mathfrak{P}]$ gewinnen[3]). Als *Punkte* von t nehmen wir die Elemente von T, als *Geraden* die Rechtsrestklassen $U+t$ von Untergruppen $U \in \mathfrak{P}$ und als Translationen aus T die Abbildungen

$$\bar{t}: \quad x \to x+t \quad (x, t \in T).$$

Man zeigt nun ganz leicht, ganz entsprechend wie in André (1954, a), § 2, S. 166 [s. auch Pickert (1955), S. 200], daß die so erhaltene Struktur eine a.P. ist, wenn man zwei Geraden $U+a$ und $V+b$ ($U, V \in \mathfrak{P}$; $a, b \in T$) genau dann *parallel* zueinander nennt, wenn $U=V$ ist: Durch die Punkte a, b geht die Gerade $U_{a,b}+b$ und keine weitere, die zu $U+a$ parallele Gerade durch b ist $U+b$; die Axiome (a 3) und (t 2) folgen daraus, daß $\mathfrak{P}$ aus eigentlichen Untergruppen besteht. Die Menge T aller Abbildungen $\bar{t}$ ist eine auf den Punkten von t transitive Gruppe von Translationen. Mithin ist t sogar eine Translationsstruktur. Übrigens ist die Abbildung $t \to \bar{t}$ ein Isomorphismus von T auf T.

3. Wir wollen jetzt umgekehrt zeigen, daß jede Translationsstruktur vermöge der oben beschriebenen Weise sich aus einer geeignet gewählten Gruppenpartition ergibt; m.a.W., daß jede Translationsstruktur isomorph zu einer Struktur $[T, \mathfrak{P}]$ ist. Der Beweis hierfür verläuft ganz analog wie der entsprechende in André (1954, a), §3.

Sei also t eine Translationsstruktur und T eine [nach (t 1) existierende] auf den Punkten von t transitive Translationsgruppe. Ferner sei o ein beliebiger, aber dann fester Punkt von t (der „Nullpunkt" oder „Ursprungspunkt"). Ist t ein weiterer Punkt, so gibt es genau eine Translation in T, die o in t überführt; sie werde $\bar{t}$ genannt. Die *Summe* t_1+t_2 zweier Punkte t_1 und t_2 (bezüglich T) werde definiert durch:

$$t_1+t_2=t_1^{\bar{t}_2}=o^{\bar{t}_1\bar{t}_2}. \tag{1.1}$$

Auf diese Weise wird die Menge T der Punkte von t zu einer Gruppe, die durch die Zuordnung $t \to \bar{t}$ als zu T isomorph erkannt wird.

Sei nun U eine Gerade von t durch o. Gilt $U^{\bar{t}}=U$, so $o^{\bar{t}}=t \in U$. Sei umgekehrt $t \in U$. Dann gilt $o \in U \cap U^{\bar{t}^{-1}}$. Andererseits ist aber $U \| U^{\bar{t}^{-1}}$, weil $\bar{t}$ und damit auch $\bar{t}^{-1}$ eine Translation aus T ist. Aus diesen beiden Bemerkungen folgt $U^{\bar{t}^{-1}}=U$, also auch $U^{\bar{t}}=U$. Jetzt folgt sofort [wie in André (1954, a), S. 166], daß die Punkte aus U eine Untergruppe von T bilden (die wir ebenfalls U nennen wollen). Aus (a 3) folgt $U \subset T$, und aus (t 2) ergibt sich, daß U nicht nur aus o allein besteht; U ist also eigentliche Untergruppe von T. Alle so erhaltenen Untergruppen bilden eine (von t und T abhängige) Partition $\mathfrak{P}=[t, \mathsf{T}]$, weil jeder von o verschiedene Punkt von t auf genau einer Geraden durch o liegt. Durch t und T ist $[t, \mathsf{T}]$ eindeutig bestimmt, denn bei der soeben angegebenen Konstruktion war nur die Wahl des Nullpunktes o willkürlich;

[3]) Dieser Sachverhalt wurde bereits im Vortragsauszug von André (1954, b) angedeutet: Die Struktur $[T, \mathfrak{P}]$ wurde dort $j(\mathfrak{P})$ genannt.

es ist jedoch wegen der Transitivität von T gleichgültig, welchen Punkt von man als Nullpunkt wählt. Die Translationen von T haben wegen (1.1) die Form $x \to x+t$; die Geraden von t ergeben sich mithin als Rechtsrestklasse von Untergruppen aus $\mathfrak{P}$. Damit ist die gewünschte Umkehrung vollständig bewiesen.

4. Vermöge der in den Ziffern 2 und 3 angegebenen Verfahren kann jede Gruppenpartition eine Translationsstruktur und umgekehrt jeder Translationsstruktur eine Gruppenpartition zugeordnet werden. Durch Hintereinanderausführung dieser beiden Schritte gelangt man wieder zur Ausgangsstruktur, d.h. es gilt:

$$t = [T, [t, \mathsf{T}]], \qquad \mathfrak{P} = [[T, \mathfrak{P}], \mathsf{T}]. \tag{1.2}$$

[Hierbei muß für die Gültigkeit der ersten Gleichung von (1.2) angenommen werden, daß die Geraden von t als Punktmengen aufgefaßt werden, was wegen (t 2) möglich ist.] Die einfachen Beweise hierfür verlaufen ebenso wie die entsprechenden in ANDRÉ (1954, a), S. 166/67 und dürfen deshalb hier übergangen werden.

Zusammenfassend erhalten wir also den folgenden [dem Satz 9 von ANDRÉ (1954) entsprechenden]

SATZ 1.3 (HAUPTSATZ ÜBER TRANSLATIONSSTRUKTUREN). *Es gibt eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Translationsstrukturen einerseits und den Gruppenpartitionen andererseits:*

Nimmt man die Elemente einer (abstrakten) Gruppe T als Punkte und die Rechtsrestklassen der Untergruppen einer Partition von T als Geraden, so erhält man eine Translationsstruktur t.

Umgekehrt erhält man aus jeder Translationsstruktur t eine Gruppenpartition deren Trägergruppe (bis auf Isomorphie) eine auf den Punkten von t transitive Translationsgruppe T ist, und deren Untergruppen aus genau denjenigen Translationen von T bestehen, die je eine Gerade von t (als Ganzes) festlassen.

BEMERKUNG. Die von einer Partition $\mathfrak{P}$ erzeugte Translationsstruktur $[T, \mathfrak{P}]$ ist genau dann eine Translationsebene, wenn $T = U + V$ für irgend zwei verschiedene $U, V \in \mathfrak{P}$ gilt. In diesem Fall ist $\mathfrak{P}$ eine *Kongruenz* [vgl. ANDRÉ (1954, a), §2; PICKERT (1955), S. 200].

§ 2. Zentrale Translationsstrukturen

1. In dem vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß die Translationsstrukturen eng mit den Partitionen von Gruppen zusammenhängen. Zur genaueren Untersuchung der Translationsstrukturen können wir also gruppentheoretische Methoden heranziehen. Andererseits liefern geometrische Untersuchungen auch gruppentheoretische Ergebnisse (vgl. insbesondere §3). Wir wollen zunächst die zentralen Translationen [also die Translationen mit (uneigentlichem) Zentrum] einer Translationsstruktur kennzeichnen.

2. Die Bezeichnungen seien dieselben wie im vorigen Paragraphen. Diejenigen Translationen aus T, welche ein $U \in \mathfrak{P}$ in sich überführen, bilden eine Untergruppe $\mathsf{T}(U)$ von T; sie besteht aus allen Abbildungen $t \to t+u$ mit $u \in U$ (vgl. §1, Ziffer 3). Die Menge aller Translationen aus $\mathsf{T}(U)$ bildet also ein festes $t \in T$ auf die Linksrestklasse $t+U$ ab:

$$t^{\mathsf{T}(U)} = t + U = (t + U - t) + t. \tag{2.1}$$

Diese Restklasse ist genau dann eine Gerade, wenn mit U auch die zu U konjugierte Gruppe $t+U-t$ zu $\mathfrak{P}$ gehört, d.h.:

Satz 2.1. *Genau dann ist jede Punktmenge $t^{\mathsf{T}(U)}$ $(t \in T,\ U \in \mathfrak{P})$, die durch Anwendung aller U festlassenden Translationen auf einen festen Punkt t entsteht, eine Gerade von $[T, \mathfrak{P}]$, wenn mit einer Untergruppe auch alle konjugierten zur Partition $\mathfrak{P}$ gehören.*

Auch eine Gerade der Form $t-U=(t+U-t)+t$ ist nicht notwendig parallel zu U. Parallelität gilt vielmehr dann und nur dann, wenn $t+U-t=U$ für alle $t \in T$ ist; das ergibt:

Satz 2.2. *Die Translationen aus $\mathsf{T}(U)$ sind genau dann alle zentral, wenn U ein Normalteiler in T ist.*

Wir nennen eine Translationsstruktur *zentral* (zentrale Translationsstruktur, abgekürzt z.T.), wenn alle ihre Translationen zentral sind[4]). Da jede Translation in einem $\mathsf{T}(U)$ liegt, sind also genau dann alle Translationen zentral, wenn jedes $U \in \mathfrak{P}$ Normalteiler in T ist. Über Partitionen mit dieser Eigenschaft gibt Auskunft der

Satz 2.3 [Kontorowitsch (1943)]. *Genau dann ist eine Gruppe T mit einer Partition $\mathfrak{P}$ abelsch, wenn alle Untergruppen von $\mathfrak{P}$ Normalteiler in T sind.*

Beweis. (a) T ist abelsch: Dann sind alle Untergruppen Normalteiler, insbesondere also die von $\mathfrak{P}$.

(b) Alle Untergruppen aus $\mathfrak{P}$ sind Normalteiler: Sei $t \in T$, $t \neq o$. Mit U_t bezeichnen wir wieder die (eindeutig bestimmte) Untergruppe von $\mathfrak{P}$, die t enthält. Es genügt, $t+t'=t'+t$ für $t, t', t+t' \neq o$ zu zeigen. Zunächst sei $U_t \neq U_{t'}$. Wegen $U_t \cap U_{t'} = \{o\}$ und der Normalteilereigenschaft von U_t und $U_{t'}$ in T, also auch in $U_t + U_{t'}$, können wir $U_t + U_{t'} = U_t \oplus U_{t'}$ als direkte Summe schreiben. Bei direkter Summation sind aber Elemente aus verschiedenen Summanden miteinander vertauschbar, insbesondere also auch t mit t'. Sei nun $U_t = U_{t'}$. Dann gibt es ein $t'' \in T$, das nicht in U_t liegt. Hieraus folgt $U_{t''} \neq U_{t'} = U_{t+t'}$ und $U_t \neq U_{t'+t''}$, und wir erhalten

$$t'' + t + t' = t + t' + t'' = t' + t'' + t = t'' + t' + t,$$

also auch in diesem Falle $t+t'=t'+t$. Damit ist T als abelsch erkannt.

---

[4]) Nach I, Satz 4.5 (b) folgt daraus, daß die Menge aller Translationen eine Gruppe bilden (die mit T übereinstimmt).

Aus den Sätzen 2.2 und 2.3 folgt sofort der

SATZ 2.4. *Eine Translationsstruktur ist genau dann zentral, wenn ihre Translationsgruppe abelsch ist.*

BEMERKUNG. Hieraus folgt, daß nicht jede Translation (also auch nicht jede axiale Kollineation) zentral ist; denn es gibt Translationsstrukturen mit nichtabelschen Translationsgruppen, oder (was nach Satz 1.3 dasselbe besagt) nichtabelsche Gruppen mit Partitionen. Einfachste Beispiele solcher Gruppen sind die Diedergruppen D_{2n} [vgl. etwa SUZUKI (1950)]. Andere nichtabelsche Gruppen mit Partitionen sind die Frobenius-Gruppen Π mit $\Pi_p > \{1\}$ für $p \in P_1$ und $|P_1| > 1$ (zu den Bezeichnungen vgl. I, §5, insbesondere Satz 5.3). Denn die Untergruppen T und Π_p bilden in diesem Falle eine Partition von Π; die Π_p sind paarweise konjugiert, also keine Normalteiler in Π; nach Satz 2.3 ist also Π nicht abelsch.

§ 3. Eine weitere gruppentheoretische Anwendung

Wir wollen jetzt die Ergebnisse des §1 benutzen, um eine weitere Eigenschaft von Gruppen mit Partitionen herzuleiten, die ebenfalls bereits KONTOROWITSCH (1943) bewiesen hat. Zunächst zeigen wir:

SATZ 3.1. *Sei $|\mathfrak{P}|$ die (endliche oder unendliche) Mächtigkeit einer Partition $\mathfrak{P}$ von T und $|U|$ die von $U \in \mathfrak{P}$. Dann gilt*

$$|\mathfrak{P}| \geqq \operatorname{Max}_{U \in \mathfrak{P}} |U| + 1 \tag{3.1}$$

unter der Voraussetzung, daß $\operatorname{Max}|U|$ existiert. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die zugehörige Translationsstruktur $[T, \mathfrak{P}]$ eine Gerade enthält, die alle zu ihr nichtparallelen Geraden schneidet.

Denn $|\mathfrak{P}|$ ist die Anzahl der Geraden von $t = [T, \mathfrak{P}]$ durch den Punkt o [und damit wegen (a 2) auch die Anzahl der Geraden durch einen beliebigen Punkt von t], und $|U|$ ist die Anzahl der Punkte auf jeder zu U parallelen Geraden L. Es gibt nun mindestens $|U| + 1$ Geraden durch o, nämlich die $|U|$ Verbindungsgeraden von o mit den Punkten von $L \neq U$ und U selbst. Also gilt $|\mathfrak{P}| \geqq |U| + 1$ und somit (3.1). Genau dann wird L von allen nicht zu L parallelen Geraden geschnitten, wenn $|\mathfrak{P}| = |U| + 1$ ist. Damit ist Satz 3.1 vollständig bewiesen. Aus ihm folgt sofort der

ZUSATZ. *Gibt es in einer Gruppe T eine Partition mit nur endlich vielen Untergruppen, so ist T selbst endlich* [KONTOROWITSCH (1943)].

§ 4. Der Kern einer Gruppenpartition

1. Die Streckungen einer Translationsstruktur $t = [T, \mathfrak{P}]$ lassen sich ganz analog gewinnen wie die einer Translationsebene [vgl. ANDRÉ (1954, a), §4; PICKERT (1955), S. 202ff.]. Wie üblich ist ein *Endomorphismus* einer Gruppe T als homomorphe Abbildung von T in sich erklärt. Sei $\mathfrak{P}$ eine Partition von T. Ein $\mathfrak{P}$-*Endomorphismus* $\varkappa$ ist ein Endomorphismus von T, der jede Unter-

gruppe von $\mathfrak{P}$ in sich abbildet: *Aus* $U \in \mathfrak{P}$ *folgt* $U^{\varkappa} \subseteq U$. Für $\mathfrak{P}$-Endomorphismen $\varkappa, \lambda$ gilt:

(a) *Mit* $\varkappa, \lambda$ *ist auch* $\varkappa\lambda$ *ein* $\mathfrak{P}$*-Endomorphismus.*

(b) *Mit* $\varkappa$ *ist auch* $\varkappa^{-1}$ *(falls vorhanden) ein* $\mathfrak{P}$*-Endomorphismus.*

(c) *Die Endomorphismen* $\underline{0}$ *und* $\underline{1}$ (die durch $t^{\underline{0}} = o$ bzw. $t^{\underline{1}} = t$ für alle $t \in T$ definiert werden) *sind* $\mathfrak{P}$*-Endomorphismen.*

Die Eigenschaften (a) und (c) sind trivial; nur (b) bedarf noch eines Beweises: Sei $u \in U \in \mathfrak{P}$; wäre $u^{\varkappa^{-1}} \in V \in \mathfrak{P}$, $V \neq U$, so $u \in V^{\varkappa} \subseteq V$, $u = o$, also doch $u^{\varkappa^{-1}} (= o) \in U$. Aus der Existenz von $\varkappa^{-1}$ folgt also $U^{\varkappa^{-1}} \subseteq U$ für jedes $U \in \mathfrak{P}$, somit ist $\varkappa^{-1}$ ein $\mathfrak{P}$-Endomorphismus.

Die Menge aller $\mathfrak{P}$-Endomorphismen von T ist also hinsichtlich ihrer Multiplikation eine Halbgruppe mit Null- und Einselement; wir nennen diese Menge *Kern* von $\mathfrak{P}$ und bezeichnen sie mit $\mathsf{K}(\mathfrak{P})$ oder auch kurz mit K, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

Satz 4.1. *Jeder von* $\underline{0}$ *verschiedene* $\mathfrak{P}$*-Endomorphismus ist eine isomorphe Abbildung der Trägergruppe* T *in sich, d.h. ein Meromorphismus von* T [vgl. Zassenhaus (1937), S. 41].

Wir müssen dazu zeigen, daß $t^{\varkappa} \neq o$ aus $t \in T$, $t \neq o$ und $\varkappa \in \mathsf{K}$, $\varkappa \neq \underline{0}$ folgt. Der Beweis hierfür geht ganz entsprechend wie der Beweis (a) von Satz 10 aus André (1954, a) und darf deshalb übergangen werden. Das Produkt zweier Meromorphismen ist wieder ein Meromorphismus, also niemals $\underline{0}$, mithin gilt

Zusatz 1. *Die Halbgruppe* K *ist nullteilerfrei.*

Ist T *endlich*, so ist jede isomorphe Abbildung von T *in* sich sogar eine Abbildung *auf* sich, also jeder Meromorphismus ein Automorphismus; m.a.W.: aus $\varkappa \in \mathsf{K}$ und $\varkappa \neq \underline{0}$ folgt die Existenz von $\varkappa^{-1}$. In diesem Fall erhalten wir also den folgenden Satz 4.1 verschärfenden

Zusatz 2. *Die Menge* K^* *der von* $\underline{0}$ *verschiedenen* $\mathfrak{P}$*-Endomorphismen eines endlichen Trägers* T *ist eine Gruppe.*

Für unendliches T braucht dies nicht zu gelten, wie wir noch sehen werden (vgl. Ziffer 4). Ist aber $\mathfrak{P}$ eine Kongruenz, d.h. $[T, \mathfrak{P}]$ eine Translationsebene, so ist $\mathsf{K}^*(\mathfrak{P})$ stets eine Gruppe [vgl. André (1954), Satz 10].

2. Sei im allgemeinen Fall $\mathsf{K}^{\times}$ die Menge aller $\mathfrak{P}$*-Automorphismen* (d.h. der $\mathfrak{P}$-Endomorphismen, die zugleich Automorphismen sind). $\mathsf{K}^{\times}$ ist eine Gruppe. Jede Abbildung $\varkappa \in \mathsf{K}^{\times}$ ist eine Streckung in $t = [T, \mathfrak{P}]$ mit dem Fixpunkt o, und umgekehrt erhält man auf diese Weise alle o-Streckungen von t. Dies sieht man ebenso ein wie den entsprechenden Sachverhalt bei Translationsebenen [André (1954, a), S. 169], und man erhält den [zu André (1954, a), Satz 11 analogen[5])]

Satz 4.2. *Die Streckungen von* $t = [T, \mathfrak{P}]$ *mit dem Fixpunkt* o *(d.h. die* o*-Streckungen) sind genau die* $\mathfrak{P}$*-Automorphismen. Die Gruppen* $\mathsf{K}^{\times}$ *und* Π_o *stimmen überein.*

[5]) Die beiden dort angegebenen Zusätze gelten dagegen allgemein nur für endliches abelsches T; vgl. Ziffer 3.

BEMERKUNG. Aus Π_o gewinnt man leicht die übrigen Streckungsgruppen Π_t $(t \in T)$; denn ist $\bar{t}$ die Translation, die o in t überführt, so gilt $\Pi_t = \bar{t}^{-1} \Pi_o \bar{t}$.

3. Wir setzen von nun an voraus, daß die Trägergruppe T *abelsch* sei. In diesem Falle ist die durch $t^{\varkappa + \lambda} = t^{\varkappa} + t^{\lambda}$ definierte *Summe* der $\mathfrak{P}$-Endomorphismen $\varkappa$ und λ wieder ein $\mathfrak{P}$-Endomorphismus. Auf diese Weise führen wir in dem Kern K neben der bereits definierten Multiplikation noch eine Addition ein; wir nennen die so gebildete Struktur ebenfalls Kern und bezeichnen sie wieder mit K, was wir ohne Befürchtung von Mißverständnissen tun können. Aus Zusatz 1 von Satz 4.1 folgt:

SATZ 4.3. *Der Kern* K *einer Partition* $\mathfrak{P}$ *mit abelschem Träger* T *ist (hinsichtlich der eingeführten Addition und Multiplikation) ein nullteilerfreier Ring mit Einselement. Man kann* T *auf natürliche Weise als* K*-Rechtsmodul auffassen (wobei das Einselement* $\underline{1}$ *von* K *auch Einheitsoperator von* T *ist).*

Sei $\mathfrak{P}$ eine Partition mit abelschem Träger T und dem Kern K, ferner $t = [T, \mathfrak{P}]$ die zugehörige Translationsstruktur (die nach Satz 2.4 zentral ist). Als *Charakteristik* von $\mathfrak{P}$ oder t bezeichnen wir die Charakteristik von K (d.h. die Ordnung von $\underline{1}$ hinsichtlich der Addition von K, wenn diese endlich ist, sonst 0). Die Charakteristik ist eine ganze nicht negative Zahl.

Für endliche abelsche Träger gilt wegen Zusatz 2 von Satz 4.1 schärfer:

SATZ 4.4. *Der Kern einer Partition* $\mathfrak{P}$ *mit endlichem abelschen Träger* T *ist ein Galois-Feld. Mithin ist* T *eine elementar abelsche Gruppe, d.h. alle Elemente* $t \neq o$ *von* T *haben die gleiche Ordnung* p*, die mit der Charakteristik von* $\mathfrak{P}$ *übereinstimmt und die in diesem Falle eine Primzahl ist.*

Jede endliche abelsche Trägergruppe ist also elementar abelsch. Ist andererseits T abelsch vom Typus $(p, \ldots, p)$ und nicht zyklisch, so bilden offenbar alle Untergruppen der Ordnung p eine (eigentliche) Partition. Also gilt:

SATZ 4.5 [YOUNG (1927)]. *Unter den endlichen abelschen Gruppen gestatten genau die nicht zyklischen elementar abelschen Gruppen eine (eigentliche) Partition.*

4. Für eine Kongruenz gilt über Satz 4.3 hinaus, daß ihr Kern stets ein Schiefkörper ist [ANDRÉ (1954, a), Satz 10]. Wie wir jetzt sehen werden, braucht dies für beliebige Partitionen mit abelscher Trägergruppe nicht mehr zu gelten. Vielmehr gilt:

SATZ 4.6. *Läßt sich ein Ring mit Einselement in einen Schiefkörper einbetten, so ist er (bis auf Isomorphie) Kern einer (geeignet gewählten) Partition einer abelschen Gruppe.*

BEWEIS. Es sei der Ring P mit Einselement in dem Schiefkörper $\bar{\mathsf{P}}$ eingebettet; ferner sei T ein Rechtsvektorraum über P mit $\dim T > 1$ und B eine Basis von T über P. Der Vektorraum $\bar{T} = B^{\bar{\mathsf{P}}}$ entsteht aus T durch Erweiterung von P zu $\bar{\mathsf{P}}$. Die Menge aller eindimensionalen $\bar{\mathsf{P}}$-Unterräume von $\bar{T}$ ist eine Partition $\bar{\mathfrak{P}}$ von $\bar{T}$, die Menge $\mathfrak{P}$ aller $\bar{U} \cap T \supset \{o\}$ mit $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{P}}$ eine von T.

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Kern K von $\mathfrak{P}$ mit P übereinstimmt. Jedenfalls gilt $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{K}$, denn die Elemente von $\mathfrak{P}$ sind P-Unterräume. Sei nun

$\varkappa \in \mathsf{K}$, o.B.d.A. sei $\varkappa \neq \underline{0}$. Das Basiselement b von T liege in der Partitionsuntergruppe $U_b = T \cap \overline{U}_b$ ($\overline{U}_b \in \overline{\mathfrak{P}}$). Es ist $U_b = b^{\mathsf{P}}$, wegen $b \in B$ und weil $\overline{U}_b$ über $\overline{\mathsf{P}}$ die Dimension 1 hat. Es gibt also ein $\varrho \in \mathsf{P}$, $\varrho \neq \underline{0}$ mit $b^{\varrho} = b^{\varkappa}$, also $b^{\varkappa\varrho^{-1}} = b$ ($\varrho^{-1} \in \overline{\mathsf{P}}$). Sei $c \notin U_b$, dann gilt $U_c \neq U_{b-c}$, also auch $\overline{U}_c \neq \overline{U}_{b-c}$. Aus $b - c^{\varkappa\varrho^{-1}} = (b-c)^{\varkappa\varrho^{-1}} \in \overline{U}_{b-c}$ folgt $c - c^{\varkappa\varrho^{-1}} \in \overline{U}_{b-c} \cap \overline{U}_c = \{o\}$, also $c = c^{\varkappa\varrho^{-1}}$. Ist $d \in U_b$, so folgt entsprechend wie eben (bei Ersetzung von b durch c), daß auch $d^{\varkappa\varrho^{-1}} = d$ ist. Daraus folgt $\varkappa\varrho^{-1} = \underline{1}$, $\varkappa = \varrho$, also $\mathsf{K} = \mathsf{P}$, was behauptet war.

Es ist unbekannt, ob Satz 4.6 die Ringe, welche Kerne einer Partition sein können, kennzeichnet. Wohl kann aber jetzt eine solche Charakterisierung für kommutative Ringe gegeben werden:

Satz 4.7. *Genau dann ist ein kommutativer Ring isomorph zu einem Kern einer geeigneten Partition einer abelschen Gruppe, wenn er nullteilerfrei ist und ein Einselement hat.*

Beweis. Ein nullteilerfreier kommutativer Ring ist stets in seinen Quotientenkörper einbettbar. Hat er außerdem ein Einselement, so ist er nach Satz 4.6 als Kern einer Partition darstellbar. Der erste Teil von Satz 4.3 liefert die Umkehrung.

Literatur

André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156—186 (1954, a).

— Bemerkungen über Gruppenpartitionen. Proc. Intern. Math. Congr. Amsterdam **2**, 3 (1954, b).

Kontorowitsch, P.: Sur les groupes à base de partition. Mat. Sbornik **12**, 56—70 (1943).

Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

Suzuki, M.: On the finite groups with a complete partition. J. Math. Soc. Jap. **2**, 165—185 (1950).

Young, J. W.: On the partitions of a group and the resulting classification. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 453—461 (1927).

Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. Leipzig: Teubner 1937.

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 13. Oktober 1960)

Babister, A. W.
Math. Zeitschr. 76, 164—173 (1961)

An inhomogeneous hypergeometric function

By

A. W. Babister

1. Introduction

In [1], the generalized modified Struve function $\Omega(a, c; x)$ was defined, this function being a particular integral of the inhomogeneous confluent hypergeometric equation

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-ay=-\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}e^{\frac{1}{2}x}.$$

In this paper, we consider the inhomogeneous hypergeometric function $B(a, b; c; z)$, defined in §3. $B(a, b; c; z)$ bears the same relation to the generalized modified Struve function Ω as $F(a, b; c; z)$ does to the confluent hypergeometric function Φ. As shown in §4, $B(a, b; c; z)$ is a particular integral of the equation

$$(1)\quad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=a\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a-1};$$

2. Integral relations for the hypergeometric function

For ease of reference, we first summarize various integral relations for the solutions of the equation

$$(2)\qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0,$$

where a, b and c are constants.

As shown in [3], the solutions of (2) can be expressed in terms of the simple loop integrals

$$(3)\qquad u_1=\frac{1}{2\pi i}\int_I^{(0+)}t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}dt,$$

$$(4)\qquad u_2=\frac{1}{2\pi i}\int_I^{(1+)}t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}dt,$$

and

$$(5)\qquad u_3=\frac{1}{2\pi i}\int_I^{(1/z+)}t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}dt,$$

where I is some convenient point in the t plane. If $\mathrm{re}\,(c-a)<2$, the integrands tend to zero as $|t|\to\infty$. Then, if

$$\arg z=\vartheta\qquad(-\pi<\vartheta<\pi),$$

we shall take I as the point at infinity having argument $\pi - \vartheta$, and

$$\arg t = \arg(t-1) = \arg(t - z^{-1}) = -\pi - \vartheta$$

at the start of the contour. The contours for u_1 and u_2 are shown in Fig. 1.

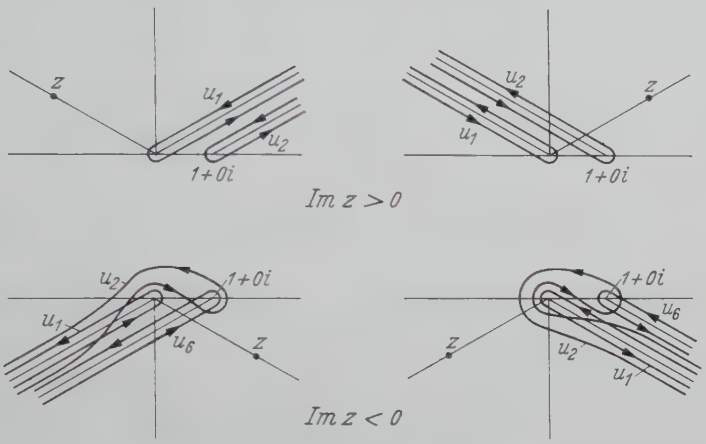

Fig. 1. Contours for u_1, u_2 and u_6

From [2], four solutions of (2) are

$$F(a,b;c;z) = i(2\pi)^{-1} e^{i\pi(b-a)} \Gamma(1-b)\,\Gamma(c)\,\Gamma(1+b-c)\,u_4, \tag{6}$$

$$z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) = e^{-i\pi a}\Gamma(a)\,\Gamma(2-c)\,[\Gamma(a+1-c)]^{-1}\,u_5, \tag{7}$$

$$\begin{cases} F(a,b;a+b+1-c;1-z) \\ \quad = -\,e^{i\pi(c-a-b)}\,\Gamma(1-b)\,\Gamma(a+b+1-c)\,[\Gamma(a+1-c)]^{-1}\,u_1, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} z^{-a} F(a, a+1-c; a+1-b; z^{-1}) \\ = e^{i\pi(b-c-2a)}\,\Gamma(a-1-b)\,\Gamma(b+1-c)\,[\Gamma(a+1-c)]^{-1}\,u_2 \qquad (\operatorname{im} z > 0), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} z^{-a} F(a, a-1-c; a-1-b; z^{-1}) \\ = e^{i\pi(b-c)}\,\Gamma(a+1-b)\,\Gamma(b-1-c)\,[\Gamma(a+1-c)]^{-1}\,u_6 \qquad (\operatorname{im} z < 0), \end{cases} \tag{10}$$

where

$$\begin{cases} u_4 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_I^{(1+,0+,1-,0-)} t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}\,dt \\ \quad = u_2[1-e^{2\pi i b}] - u_1[1-e^{2\pi i(c-b)}], \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} u_5 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_I^{(0+,1+)} t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}\,dt \\ \quad = u_1 + u_2\,e^{2\pi i b}, \end{cases} \tag{12}$$

and

$$u_6 = u_1[1-e^{2\pi i(c-b)}] + u_2 e^{2\pi i b}. \tag{13}$$

The contour for u_6 is shown in Fig. 1.

As shown in [2], the path of integration for u_4 may be contracted to a finite contour $(1+, 0+, 1-, 0-)$; in that case, the restriction that $\mathrm{re}\,(c-a)<2$ is no longer necessary. Finally, putting $t=\frac{1}{2}(1+s)$, we find that (11) can be reduced to

$$\left\{\begin{aligned} u_4 = i\frac{2^{-c}}{\pi} e^{i\pi(a-b-c)} \Bigg[& (1-e^{2i\pi b}) \int_0^{(1+)} (1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1} \times \\ & \times \Big[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z\Big]^{-a} ds - \{1-e^{2i\pi(c-b)}\} \int_0^{(-1+)} (1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1} \times \\ & \times \Big[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z\Big]^{-a} ds \Bigg], \end{aligned}\right. \tag{14}$$

where the arguments of $1+s$, $1-s$ and $1-\frac{1}{2}(1+s)z$ all have their principal values at the start of the contours, and z^{-1} is not a real number between 0 and 1.

For $\mathrm{re}\,c > \mathrm{re}\,b > 0$, the contours of integration in (14) may be replaced by portions of the real axis. We find that

$$\left\{\begin{aligned} F(a,b;c;z) = 2^{1-c}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-s^2)^{\frac{1}{2}c-1} \Big[\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{b-\frac{1}{2}c} \times \\ \times \Big[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z\Big]^{-a} + \Big(\frac{1-s}{1+s}\Big)^{b-\frac{1}{2}c}\Big[1-\tfrac{1}{2}(1-s)z\Big]^{-a}\Big] ds. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

The corresponding formula for the confluent hypergeometric function can be deduced immediately, if we put $z=x/a$ and let $a\to\infty$. Then

$$\lim_{a\to\infty} F(a,b;c;x/a) = \Phi(b,c;x)$$

and (15) reduces to

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(b,c;x) = 2^{2-c}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} e^{\frac{1}{2}x} \int_0^1 (1-s^2)^{\frac{1}{2}c-1} \times \\ \times \cosh\Big[\tfrac{1}{2}xs + \Big(b-\tfrac{1}{2}c\Big)\log\frac{1+s}{1-s}\Big] ds, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

in agreement with [1].

3. Inhomogeneous hypergeometric function $B(a, b; c; z)$

Consider the function $B(a, b; c; z)$ defined by

$$B(a,b;c;z) = i(2\pi)^{-1} e^{i\pi(b-a)} \Gamma(1-b)\,\Gamma(c)\,\Gamma(1+b-c)\,v, \tag{17}$$

where

$$(18)\quad \begin{cases} v = i\,\dfrac{2^{-c}}{\pi}\,e^{i\pi(a-b-c)}\left[(1-e^{2i\pi b})\displaystyle\int_0^{(1+)}(1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1}\left[1-\frac{1}{2}(1+s)z\right]^{-a}ds + \right. \\ \left. \quad +\{1-e^{2i\pi(c-b)}\}\displaystyle\int_0^{(-1+)}(1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1}\left[1-\frac{1}{2}(1+s)z\right]^{-a}ds\right], \end{cases}$$

where the arguments of $1+s$, $1-s$ and $1-\frac{1}{2}(1+s)z$ all have their principal values at the start of the contours, and z^{-1} is not a real number between 0 and 1.

From (6) and (17),

$$\frac{B(a,b;c;z)}{F(a,b;c;z)} = \frac{v}{u_1}.$$

For $\operatorname{re} c > \operatorname{re} b > 0$, the contours of integration in (18) may be replaced by portions of the real axis. We find that

$$(19)\quad \begin{cases} B(a,b;c;z) = 2^{1-c}\,\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\displaystyle\int_0^1 (1-s^2)^{\frac{1}{2}c-1}\times \\ \quad \times\left[\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{b-\frac{1}{2}c}\left[1-\frac{1}{2}(1+s)z\right]^{-a} - \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{b-\frac{1}{2}c}\left[1-\frac{1}{2}(1-s)z\right]^{-a}\right]ds. \end{cases}$$

Put $z=x/a$ and let $a\to\infty$. The right hand side of (19) reduces to

$$2^{2-c}\,\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\;e^{\frac{1}{2}x}\int_0^1 (1-s^2)^{\frac{1}{2}c-1}\sinh\left[\frac{1}{2}\,xs+\left(b-\frac{1}{2}\,c\right)\log\frac{1+s}{1-s}\right]ds,$$

which, from [1], is equal to $\Omega(b,c;x)$, where Ω is the generalized modified Struve function. Thus

$$(20)\qquad \lim_{a\to\infty} B(a,b;c;x/a) = \Omega(b,c;x).$$

From [1], $\Omega(b,c;x)$ is a particular integral of the inhomogeneous confluent hypergeometric equation

$$(21)\qquad x\,\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\,\frac{dy}{dx}-by = \frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,e^{\frac{1}{2}x}.$$

From (18), putting $t=\frac{1}{2}(1+s)$, we see that

$$(22)\quad \begin{cases} v = \dfrac{1}{2\pi i}\left[(1-e^{2i\pi b})\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{(1+)} t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}\,dt + \right. \\ \left. \quad +\{1-e^{2i\pi(c-b)}\}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{(0+)} t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}\,dt\right], \end{cases}$$

where $\arg t = -2\pi$ and $\arg(t-1) = -\pi$ at the start of the contour. At tha point, $\arg(t-z^{-1})$ is chosen so that it tends to $-\pi-\vartheta$ as z tends to zer (with argument ϑ).

Using (3), (4) and (13), we see, by deforming the contours, that, $\mathrm{re}(c-a)<2$, (22) can be put in the form

$$(23)\quad \begin{cases} v = \dfrac{1}{2\pi i}\Big[(1-e^{2i\pi b})\Big\{\displaystyle\int_{\frac12}^{I} Z\,dt + 2\pi i\,u_2 - e^{2i\pi(c-b)}\int_{\frac12}^{I} Z\,dt\Big\} + \\ \quad +\{1-e^{2i\pi(c-b)}\}\Big\{\displaystyle\int_{\frac12}^{I} Z\,dt + 2\pi i\,u_1 - e^{2i\pi b}\int_{\frac12}^{I} Z\,dt\Big\}\Big] \qquad (\mathrm{im}\,z>0) \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} v = \dfrac{1}{2\pi i}\Big[(1-e^{2i\pi b})\Big\{\displaystyle\int_{\frac12}^{I} Z\,dt + 2\pi i\,e^{-2i\pi b}\,u_6 - e^{2i\pi(c-b)}\int_{\frac12}^{I} Z\,dt\Big\} + \\ +\{1-e^{2i\pi(c-b)}\}\Big\{\displaystyle\int_{\frac12}^{I} Z\,dt + 2\pi i\,e^{-2i\pi b}\,u_1 - e^{2i\pi b}\int_{\frac12}^{I} Z\,dt\Big\}\Big] \qquad (\mathrm{im}\,z<0) \end{cases}$$

where

$$Z = t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(zt-1)^{-a}$$

and the contours for u_1, u_2 and u_6 are given above.

The integrals $\int_{\frac12}^{I} Z\,dt$ can be taken along a line through $t=\frac12$ having argumen $(\pi-\vartheta)$, where $\arg z=\vartheta$ $(-\pi<\vartheta<\pi)$. Putting $t=r+\frac12$, we find that

$$(25)\qquad \int_{\frac12}^{I} Z\,dt = e^{2i\pi(a-c)}\int_{0}^{\infty\exp(i\pi-i\vartheta)} (r+\tfrac12)^{b-1}(r-\tfrac12)^{c-b-1}\{z(r+\tfrac12)-1\}^{-a}\,dr$$

where the arguments of $r+\frac12$ and $r-\frac12$ are to be taken as 0 and π at th origin, and $\arg(r+\frac12-z^{-1})$ is chosen so that, at the origin, it tends to $\pi-$ as z tends to zero (with argument ϑ).

From (17), (23) and (24), using (8)—(10), we find that

$$(26)\quad \begin{cases} B(a,b;c;z) = e^{i\pi(a+b-c)\varepsilon}\dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+1-c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a+1-b)}\,z^{-a}F(a,a+1-c;a+1-b;z^{-1}) - \\ \quad -e^{i\pi b\varepsilon}\dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+1-c)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a+b+1-c)}F(a,b;a+b+1-c;1-z) - \\ \quad -2e^{i\pi(a+b-c)}\dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\displaystyle\int_{0}^{\infty\exp(i\pi-i\vartheta)}\Big(r+\frac12\Big)^{b-1}\Big(r-\frac12\Big)^{c-b-1}\times \\ \quad \times\Big\{z\Big(r+\frac12\Big)-1\Big\}^{-a}\,dr \qquad [\mathrm{re}(c-a)<2], \end{cases}$$

where $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\mathrm{im}\,z)=1,\ -1$ according as $\mathrm{im}\,z>0,\ <0$.

4. Differential equation satisfied by $B(a, b; c; z)$

As in [(2) 60], it can be shown that

$$(27)\qquad \begin{cases} \left\{z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\partial}{\partial z}-ab\right\}\times \\ \quad\times\left[(1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1}\left\{1-\frac{1}{2}(1+s)z\right\}^{-a}\right] \\ =-\frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial s}\left[(1+s)^{b}(1-s)^{c-b}\left\{1-\frac{1}{2}(1+s)z\right\}^{-a-1}\right]. \end{cases}$$

From (17), (18) and (27), after some reduction, we find that $B(a, b; c; z)$ satisfies the inhomogeneous hypergeometric equation

$$(28)\qquad z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=a\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a-1}.$$

Equation (28) can be written in the alternative form

$$(29)\qquad [\delta(\delta+c-1)-z(\delta+a)(\delta+b)]u=a\frac{2^{1-c}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a-1},$$

where

$$\delta\equiv z\frac{d}{dz}.$$

Differentiating (18) with respect to z, we obtain

$$(30)\qquad \frac{dB(a, b; c; z)}{dz}=\frac{ab}{c}B(a+1, b+1; c+1; z),$$

$$(31)\qquad \frac{d^nB(a, b; c; z)}{dz^n}=\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)}B(a+n, b+n; c+n; z).$$

5. Relations for contiguous functions

From (6), (14), (17) and (18),

$$(32)\qquad B(a, b; c; z)+F(a, b; c; z)=\frac{i}{\pi}2^{1-c}e^{i\pi(b-c)}\frac{\Gamma(c)\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(b)}I(a, b; c; z),$$

where

$$(33)\qquad I(a, b; c; z)=\int_0^{(1+)}(1+s)^{b-1}(1-s)^{c-b-1}[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z]^{-a}ds.$$

From (33),

$$(34)\qquad I(a+1; b; c; z)=I(a, b; c; z)+\tfrac{1}{2}zI(a+1, b+1; c+1; z),$$

and

$$(35)\qquad 2I(a, b; c-1; z)=I(a, b; c; z)+I(a, b+1; c; z).$$

Integrating (33) by parts we obtain

$$\begin{aligned} bI(a, b; c; z)=&\{e^{2i\pi(c-b)}-1\}(1-\tfrac{1}{2}z)^{-a}+ \\ &+(c-b-1)\int_0^{(1+)}(1+s)^{b}(1-s)^{c-b-2}[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z]^{-a}ds- \\ &-\tfrac{1}{2}az\int_0^{(1+)}(1+s)^{b}(1-s)^{c-b-1}[1-\tfrac{1}{2}(1+s)z]^{-a-1}ds, \end{aligned}$$

that is,

$$(36)\quad \begin{cases} b\,I(a,b;c;z)+(b-c+1)\,I(a,b+1;c;z)+ \\ \quad +\frac{1}{2}a\,z\,I(a+1,b+1;c+1;z)=\{e^{2i\pi(c-b)}-1\}\,(1-\frac{1}{2}z)^{-a}. \end{cases}$$

From (34)–(36), using (32) and the recurrence formulae for F given in [2] we obtain

$$(37)\quad B(a+1,b;c;z)=B(a,b;c;z)+b\,c^{-1}z\,B(a+1,b+1;c+1;z),$$

$$(38)\quad (c-1)\,B(a,b;c-1;z)=(c-b-1)\,B(a,b;c;z)+b\,B(a,b+1;c;z)$$

$$(39)\quad \begin{cases} B(a,b+1;c;z)=B(a,b;c;z)+a\,c^{-1}z\,B(a+1,b+1;c+1;z)+ \\ \quad +\dfrac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b+1)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a}. \end{cases}$$

We shall now show that the six contiguous functions $B(a\pm1,b;c;z)$, $B(a,b\pm1;c;z)$, $B(a,b;c\pm1;z)$ can be expressed in terms of $B(a,b;c;z)$ and its derivative with respect to z [cf. [3] 92]. As in [3], for conciseness we denote these contiguous functions by B_{a+}, B_{a-}, etc.

From (30) and (37),

$$(40)\quad a\,B_{a+}=(\delta+a)\,B,$$

where $\delta=z\,\frac{d}{dz}$. The operator δ is used in this sense in the following analysis. Now, from (29),

$$[\delta(\delta+c-1)-z(\delta+a-1)(\delta+b)]\,B_{a-}=(a-1)\,\frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a},$$

that is,

$$(41)\quad \begin{cases} [\delta+c-a-z(\delta+b)]\,(\delta+a-1)\,B_{a-} \\ \quad =(a-1)\,\dfrac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a}+(c-a)\,(a-1)\,B_{a-}. \end{cases}$$

From (40), with $a-1$ instead of a, and (41),

$$(42)\quad (c-a)\,B_{a-}=[(1-z)\,\delta+c-a-b\,z]\,B-\frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a}.$$

From (30) and (39),

$$(43)\quad b\,B_{b+}=(\delta+b)\,B+\frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a}.$$

Now, from (29),

$$[\delta(\delta+c-1)-z(\delta+a)(\delta+b-1)]\,B_{b-}=a\,\frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b-1)\,\Gamma(c-b+1)}\,z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a-1},$$

that is,

$$(44)\quad \begin{cases} [\delta+c-b-z(\delta+a)]\,(\delta+b-1)\,B_{b-} \\ \quad =a\,\dfrac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b-1)\,\Gamma(c-b+1)}\,z\left(1-\frac{1}{2}z\right)^{-a-1}+(c-b)\,(b-1)\,B_{b-}. \end{cases}$$

From (43), with $b-1$ instead of b, and (44),

$$(45)\quad (c-b)\,B_{b-} = [(1-z)\,\delta + c - b - a\,z]\,B - \frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a}.$$

From (38) and (43),

$$(46)\quad (c-1)\,B_{c-} = (\delta + c - 1)\,B + \frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a}.$$

Now, from (29),

$$[\delta(\delta+c) - z(\delta+a)(\delta+b)]\,B_{c+} = a\,\frac{2^{-c}\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c+1-b)}\,z\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a-1},$$

that is,

$$(47)\quad \begin{cases} [\delta - z(\delta + a + b - c)]\,(\delta + c)\,B_{c+} \\ \qquad = a\,\dfrac{2^{-c}\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c+1-b)}\,z\left(1-\dfrac{1}{2}\,z\right)^{-a-1} + (c-a)\,(c-b)\,z\,B_{c+}. \end{cases}$$

From (46), with $c+1$ instead of c, and (47),

$$(48)\quad \begin{cases} (c-a)\,(c-b)\,z\,B_{c+} \\ \qquad = c\,[(1-z)\,\delta + z(c-a-b)]\,B - \dfrac{2^{1-c}\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\dfrac{1}{2}\,z\right)^{-a}. \end{cases}$$

Equations (40), (42), (43), (45), (46) and (48) may be rearranged to give

$$(49)\quad \delta B = a\,(B_{a+} - B),$$

$$(50)\quad \delta B = b\,(B_{b+} - B) - \frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a},$$

$$(51)\quad \delta B = (c-1)\,(B_{c-} - B) - \frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a},$$

$$(52)\quad (1-z)\,\delta B = (c-a)\,B_{a-} + (a-c+b\,z)\,B + \frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a},$$

$$(53)\quad (1-z)\,\delta B = (c-b)\,B_{b-} + (b-c+a\,z)\,B + \frac{2^{2-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a},$$

$$(54)\quad \begin{cases} c\,(1-z)\,\delta B = (c-a)\,(c-b)\,z\,B_{c+} + c\,(a+b-c)\,z\,B + \\ \qquad + \dfrac{2^{1-c}\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\,z\left(1-\dfrac{1}{2}\,z\right)^{-a}. \end{cases}$$

The 15 relations between the six contiguous functions (corresponding to Gauss's relations for the hypergeometric function) follow from (49)—(54), on equating any two values of δB.

6. Associated differential equations

From (17) and (18),

$$(55)\quad B(a, b; c; z) = -(1-z)^{-a}\,B[a, c-b; c; z/(z-1)].$$

Thus $(1-z)^{-a}\,B[a, b; c; z/(z-1)]$ is a particular integral of the equation

$$z(1-z)\,\frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)\,z]\,\frac{du}{dz} - a\,b\,u = -a\,\frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\left(1-\frac{1}{2}\,z\right)^{-a-1}.$$

B function	$f(z)$
$B(a, b; c; z)$ $(1-z)^{-a} B[a, c-b; c; z/(z-1)]$	$\pm a \dfrac{2^{a-c+2}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} (2-z)^{-a-1}$
$(1-z)^{c-a-b} B(c-a, c-b; c; z)$ $(1-z)^{-b} B[c-a, b; c; z/(z-1)]$	$\pm (c-a) \dfrac{2^{2-c}\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \times$ $\times (2-z)^{a-c-1} (1-z)^{c-a-b}$
$z^{1-c} B(b+1-c, a+1-c; 2-c; z)$ $z^{1-c} (1-z)^{c-b-1} \times$ $\times B[b+1-c, 1-a; 2-c; z/(z-1)]$	$\pm (b+1-c) \dfrac{2^{b+1}\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(1-a)} \times$ $\times (2-z)^{c-b-2} z^{1-c}$
$z^{1-c} (1-z)^{c-a-b} B(1-b, 1-a; 2-c; z)$ $z^{1-c} (1-z)^{c-a-1} \times$ $\times B[1-b, a+1-c; 2-c; z/(z-1)]$	$\pm (1-b) \dfrac{2^{c-b+1}\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(a+1-c)} \times$ $\times (2-z)^{b-2} (1-z)^{c-a-b} z^{1-c}$
$B(a, b; a+b+1-c; 1-z)$ $z^{-a} B(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-z^{-1})$	$\pm a \dfrac{2^{c-b+1}\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)} (1+z)^{-a-1}$
$z^{1-c} B(b+1-c, a+1-c;$ $a+b+1-c; 1-z)$ $z^{-b} B(b+1-c, b; a+b+1-c; 1-z^{-1})$	$\pm (b+1-c) \dfrac{2^{2-a}\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b)} \times$ $\times (1+z)^{c-b-2} z^{1-c}$
$(1-z)^{c-a-b} B(c-a, c-b;$ $c+1-a-b; 1-z)$ $z^{a-c} (1-z)^{c-a-b} B(c-a, 1-a;$ $c+1-a-b; 1-z^{-1})$	$\pm (c-a) \dfrac{2^{b+1}\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(1-a)} \times$ $\times (1+z)^{a-c-1} (1-z)^{c-a-b}$
$z^{1-c} (1-z)^{c-a-b} \times$ $\times B(1-b, 1-a; c+1-a-b; 1-z)$ $z^{b-c} (1-z)^{c-a-b} \times$ $\times B(1-b, c-b; c+1-a-b; 1-z^{-1})$	$\pm (1-b) \dfrac{2^{a-c+2}\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-b)} \times$ $\times (1+z)^{b-2} (1-z)^{c-a-b} z^{1-c}$
$(-z)^{-a} B(a, a+1-c;. a+1-b; z^{-1})$ $(1-z)^{-a} B[a, c-b; a+1-b; (1-z)^{-1}]$	$\pm a \dfrac{2^{b+1}\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(c-b)} (1-2z)^{-a-1}$
$(-z)^{b-c} (1-z)^{c-a-b} \times$ $\times B(1-b, c-b; a+1-b; z^{-1})$ $(-z)^{1-c} (1-z)^{c-a-1} \times$ $\times B[1-b, a+1-c; a+1-b; (1-z)^{-1}]$	$\pm (1-b) \dfrac{2^{2-a}\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a+1-c)} \times$ $\times (1-2z)^{b-2} (1-z)^{c-a-b} (-z)^{1-c}$
$(-z)^{-b} B(b+1-c, b; b+1-a; z^{-1})$ $(-z)^{1-c} (1-z)^{c-b-1} \times$ $\times B[b+1-c, 1-a; b+1-a; (1-z)^{-1}]$	$\pm (b+1-c) \dfrac{2^{a-c+2}\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(b)\Gamma(1-a)} \times$ $\times (1-2z)^{c-b-2} (-z)^{1-c}$
$(-z)^{a-c} (1-z)^{c-a-b} \times$ $\times B(c-a, 1-a; b+1-a; z^{-1})$ $(1-z)^{-b} B[c-a, b; b+1-a; (1-z)^{-1}]$	$\pm (c-a) \dfrac{2^{c-b+1}\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(1-a)\Gamma(b)} \times$ $\times (1-2z)^{a-c-1} (1-z)^{c-a-b}$

There are 24 functions of the type

$$z^{\lambda}(1-z)^{\mu} B(a', b'; c'; z')$$

which correspond to Kummer's 24 solutions of the hypergeometric equation. These functions are particular integrals of equations of the form

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = f(z).$$

The 24 functions, grouped in pairs according to (55), are given in the table, together with the corresponding values of $f(z)$.

References

[1] Babister, A. W.: Generalized modified Struve functions. Quart. J. Math., Oxford (2) **10**, 214—223 (1959).

[2] Erdélyi, A.: Higher transcendental functions, vol. 1. Bateman Manuscript Project, 1953.

[3] Poole, E. G. C.: Linear differential equations. Oxford 1936.

The University, Glasgow

(Eingegangen am 25. Juli 1960)

Berz, E.
Math. Zeitschr. 76, 174—198 (1961)

Lösung der linearen Differentialgleichung durch Transformation in einen Schiefkörper

Von

Edgar Berz

Einleitung

Sind die Koeffizienten der linearen Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n Y(t) = F(t)$$

konstant, so kann man die Gleichung bei geeignetem $F(t)$ mittels der Laplace-Transformation $\mathfrak{L}$ lösen. Das Prinzip ist dabei folgendes: Man wendet $\mathfrak{L}$ auf (I) an. Dies ergibt für das Bild $y(s) = \mathfrak{L}\{Y(t)\}$ eine einfache algebraische Gleichung

$$a(s)\, y(s) = b(s).$$

Zur Bildfunktion $y = a^{-1} b$ ist dann noch die Urfunktion $Y(t)$ zu bestimmen. Diese ist Lösung von (I).

Eine ganz entsprechende Methode wird in dieser Arbeit für den Fall entwickelt, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung sowie F [1]) analytische Funktionen sind, etwa um $t = 0$.

An die Stelle der Laplace-Transformation tritt dabei eine Transformation $\mathfrak{T}$ die für die Klasse C_δ der in

$$|s| < \delta, \qquad |t| < \delta$$

analytischen Funktionen $K(s, t)$ erklärt ist. Der Bildbereich ist nicht wie oben eine Funktionenklasse, sondern ein Schiefkörper SK. Durch diese Transformation läßt sich die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung $a x = b$ in bezug auf den Schiefkörper SK überführen. Zu der Lösung $x = a^{-1} b$ im Bildbereich SK läßt sich dann eine Urfunktion bestimmen und diese ist Lösung der vorgelegten Differentialgleichung.

§ 1. Der Operatorenring $\mathsf{K}[s, I]$

Sei K der Körper der komplexen Zahlen und $\mathfrak{C}_\delta$ die Klasse aller komplexen Funktionen $f(s)$, die für $|s| < \delta$ regulär sind. Eine Vorschrift A, die jeder $f \in \mathfrak{C}_\delta$ in eindeutiger Weise ein Element Af zuordnet, heiße Operator in $\mathfrak{C}_\delta$. Für diese Operatoren $A, B, \ldots$ definieren wir Gleichheit, Summe und Produkt in üblicher Weise:

$$A = B \text{ genau dann, wenn } Af = Bf \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{C}_\delta,$$
$$(AB) f = A(Bf), \qquad (A + B) f = Af + Bf.$$

[1]) Die Resultate sind bei Beschränkung auf das Reelle auch für stetiges F gülti

A heiße additiv, wenn für jedes Paar $f, g \in \mathfrak{E}_\delta$ gilt:

$$A(f+g) = Af + Ag.$$

Die Gesamtheit dieser additiven Operatoren in $\mathfrak{E}_\delta$ bilden offenbar einen Ring. Aus diesem greifen wir folgende Elemente heraus:

1. Multiplikation mit einer Konstanten:

Sei c eine Konstante aus K und es werde $f(s)$ in $c \cdot f(s)$ abgebildet. Diesen Operator bezeichnen wir ebenfalls mit c:

$$cf = c \cdot f.$$

2. Multiplikation mit s:

Sei s die komplexe Veränderliche und es werde $f(s)$ in $s \cdot f(s)$ überführt. Dieser Operator wird mit s bezeichnet:

$$sf = s \cdot f.$$

3. Integrationsoperator:

Die Zuordnung

$$f(s) \to \int_0^s f(\sigma)\, d\sigma \quad \text{mit} \quad |s| < \delta$$

werde als „Integrationsoperator I" eingeführt.

Diese Operatoren 1. bis 3. erzeugen für sich einen Ring. Er besteht aus allen Operatoren, die sich aus 1. bis 3. durch endliche Verknüpfung (Addition und Multiplikation) ergeben. Diesen Ring bezeichnen wir durch $\mathsf{K}[s, I]$.

Wir wollen nun die Struktur von $\mathsf{K}[s, I]$ angeben. Hierfür ist grundlegend die Vertauschungsrelation:

$$Is = sI - I^2.$$

Man beweist sie leicht durch partielle Integration:

$$(Is)f = \int_0^s \sigma f(\sigma)\, d\sigma = s \int_0^s f(\sigma)\, d\sigma - \int_0^s \left(\int_0^\sigma f(\sigma')\, d\sigma' \right) d\sigma = (sI - I^2) f.$$

Wendet man diese Vertauschungsrelation konsequent auf jedes Produkt Is an, so erhält man nur „geordnete" Produkte, bei denen s vor I kommt. Es läßt sich demnach jedes Element aus $\mathsf{K}[s, I]$ als „geordnetes Polynom"

$$f(s, I) = \sum_{i,k} c_{ik}\, s^i I^k$$

mit Koeffizienten aus K darstellen.

Ohne große Mühe läßt sich beweisen, daß diese Darstellung durch ein geordnetes Polynom eindeutig ist.

Man kann daher die Elemente von $\mathsf{K}[s, I]$ umkehrbar eindeutig den gewöhnlichen Polynomen $f(u, v^{-1})$ in u, v^{-1} zuordnen vermöge:

$$f(s, I) = \sum c_{ik}\, s^i I^k \to \sum c_{ik}\, u^i v^{-k} = f(u, v^{-1}).$$

Diese Zuordnung ist offenbar bezüglich der Addition ein Isomorphismus. Man kann ihn auf die Multiplikation ausdehnen, indem man für die $f(u, v^{-1})$ ein Produkt in folgender Weise definiert:

Unter $f(u, v^{-1}) \times g(u, v^{-1})$ werde das Polynom in u, v^{-1} verstanden, das man durch formales Ausmultiplizieren und Voranstellen der Faktoren u erhält.

Die partiellen Ableitungen sollen für $f = \sum c_{ik} u^i v^{-k}$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sum c_{ik}\, i\, u^{i-1} v^{-k}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \sum c_{ik}(-k)\, u^i v^{-k-1}$$

definiert sein. (Dabei gilt offenbar die Produktregel, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial u}(f \times g) = \frac{\partial f}{\partial u} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial u}\Big).$$

Das Produkt $f \cdot g$ soll dann sein:

$$f \cdot g = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu}.$$

Von diesem Produkt läßt sich beweisen, daß es distributiv und assoziativ ist. Dies wird später in noch größerer Allgemeinheit geschehen.

Bezüglich dieses Produktes für die Polynome $f(u, v^{-1})$ ist nun die Zuordnung

$$f(s, I) \leftrightarrow f(u, v^{-1})$$

ein Isomorphismus: Nach der getroffenen Produktdefinition erfüllen nämlich die Elemente u, v^{-1} die Vertauschungsrelation:

$$v^{-1} u = u v^{-1} - (v^{-1})^2.$$

Man rechnet also mit den Polynomen $f(u, v^{-1})$ ebenso wie mit den Polynomen $f(s, I)$.

Wir haben also folgenden Isomorphiesatz:

Der Ring $\mathsf{K}[s, I]$, *bestehend aus den Operatorpolynomen* $\sum c_{ik} s^i I^k$, *wird vermöge der Zuordnung*

$$\sum c_{ik} s^i I^k \to \sum c_{ik} u^i v^{-k}$$

isomorph auf den Polynomring $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ *bezogen, wenn für letzteren obige Produktdefinition zugrunde gelegt wird:*

$$\mathsf{K}[s, I] \cong \mathsf{K}[u, v^{-1}].$$

§ 2. Integraloperatoren und ihre Kerne

DEFINITION. *Ein Operator aus* $\mathsf{K}[s, I]$ *heiße Integraloperator, wenn er das von I freie Glied nicht enthält, also von der Form*

$$\varphi_0 I + \varphi_1 I^2 + \cdots + \varphi_{n-1} I^n$$

ist, wobei die φ_i *Polynome in s sind.*

Die Ausübung eines solchen Integraloperators K kann auf eine einzige ntegration zurückgeführt werden:

$$Kf = \int_0^s \left(\varphi_0(s) + \varphi_1(s)\frac{(s-t)}{1!} + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) f(t)\,dt$$

$$= \int_0^s K(s,t)\,f(t)\,dt \quad \text{mit} \quad K(s,t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi_\nu(s)\frac{(s-t)^\nu}{\nu!}.$$

Definition. *Ist*

$$K = \varphi_0 I + \varphi_1 I^2 + \cdots + \varphi_{n-1} I^n,$$

o bezeichnen wir

$$K(s,t) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s)\frac{(s-t)}{1!} + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ls den zum Integraloperator gehörigen Kern.

Zwischen den Integraloperatoren und den zugehörigen Kernen besteht eine mkehrbar eindeutige Zuordnung

$$K \sim K(s,t)$$

nd diese ist offenbar bezüglich der Addition ein Isomorphismus.

Bezüglich der Multiplikation gilt der

Satz. *Aus*

$$K_i \sim K_i(s,t), \qquad i = 1, 2$$

olgt:

$$K_1 K_2 \sim \int_t^s K_1(s,\sigma)\,K_2(\sigma,t)\,d\sigma.$$

Dem Operatorprodukt $K_1 K_2$ entspricht also die „Volterrasche Komposition" von $K_1(s,t)$, $K_2(s,t)$.

Der Beweis ist aus der Theorie der Integralgleichungen bekannt. Der letzte Satz gibt Veranlassung zu der

Definition. *Sind* $K_1(s,t)$, $K_2(s,t)$ *Polynome in* s, t, *so soll sein:*

$$K_1(s,t) * K_2(s,t) = \int_t^s K_1(s,\sigma)\,K_2(\sigma,t)\,d\sigma.$$

Bezüglich dieses Produkts ist dann die Zuordnung

$$K \to K(s,t)$$

ausführlich:

$$\varphi_0(s)\,I + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\,I^n \to \varphi_0(s) + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ein Isomorphismus.

Andererseits können wir die Integraloperatoren K nach §1 auch zum Ring $K[u, v^{-1}]$ in Isomorphie bringen, und zwar mit der Zuordnung:

$$\varphi_0(s)\,I + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\,I^n \to \varphi_0(u)\,v^{-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(u)\,v^{-n}.$$

Hieraus folgt der

SATZ. *Ordnet man dem Kern*

$$K(s,t) = \varphi_0(s) + \cdots + \varphi_{n-1}(s)\ \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

das Element

$$\varphi_0(u)\,v^{-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(u)\,v^{-n} \in \mathsf{K}[u, v^{-1}]$$

zu, so ergibt sich ein Isomorphismus. Bei diesem geht die Volterrasche Komposition $K_1(s,t) * K_2(s,t)$ *in das Produkt der Bildelemente über.*

Diese Zuordnung ist in spezieller Form bereits diejenige Transformation, die die Rolle der Laplace-Transformation übernehmen soll. Für die Anwendung auf Differentialgleichungen sind noch folgende Verallgemeinerungen nötig:

1. Der Ring $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ ist in einen Schiefkörper einzubetten.

2. Während bisher die Kerne $K(s,t)$ Polynome in s, t waren, sollen sie künftig komplexe Funktionen sein, die für

$$|s| < \delta, \qquad |t| < \delta$$

analytisch sind.

§ 3. Einbettung von $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ in einen Schiefkörper

Unter $\varphi(u)$ werde ein Ausdruck

$$c_0 u^n + c_1 u^{n+1} + c_2 u^{n+2} + \cdots \quad \text{mit} \quad c_0 \neq 0$$

verstanden, wobei n eine ganze Zahl $\gtreqless 0$ und die c_i komplexe Zahlen. Zu der Menge dieser Elemente nehmen wir die Null hinzu. Zwei solche Elemente heißen gleich, wenn sie entweder beide gleich Null oder wenn sie in den Zahlen n, c_i übereinstimmen. Die Addition zweier solcher Elemente soll durch Addition entsprechender c_i geschehen. Das Produkt soll durch formales Ausmultiplizieren gebildet werden: Ist

$$\varphi(u) = c_0 u^n + c_1 u^{n+1} + \cdots$$
$$\bar{\varphi}(u) = \bar{c}_0 u^{\bar{n}} + \bar{c}_1 u^{\bar{n}+1} + \cdots,$$

so definieren wir:

$$\varphi(u)\,\bar{\varphi}(u) = c_0\bar{c}_0 u^{n+\bar{n}} + (c_0\bar{c}_1 + c_1\bar{c}_0) u^{n+\bar{n}+1} + (c_0\bar{c}_2 + c_1\bar{c}_1 + c_2\bar{c}_0) u^{n+\bar{n}+2} + \cdots$$

Mit diesen Verknüpfungen ergibt sich offenbar ein kommutativer Ring. Ferner Zu jedem $\varphi(u) \neq 0$ existiert das Inverse φ^{-1}. Setzt man nämlich

$$\varphi^{-1} = c_0' u^{n'} + c_1' u^{n'+1} + \cdots,$$

so ergibt sich $n' = -n$ und das folgende Rekursionssystem für die c_i':

$$c_0 c_0' = 1$$
$$c_0 c_1' + c_1 c_0' = 0$$
$$\sum c_\nu c_{n-\nu}' = 0 \qquad (n \geqq 1).$$

Wegen $c_0 \neq 0$ läßt es sich eindeutig nach den c_i' auflösen. Die Menge der $\varphi(u)$ bilden also einen kommutativen Körper: $\mathsf{K}(u)$.

Für das Folgende definieren wir noch für $\varphi = \sum_0^\infty c_i u^{n+i}$ die Ableitung:

$$\varphi'(u) = \sum_0^\infty c_i (n+i) u^{n+i-1}.$$

Ausgehend von $\mathsf{K}(u)$ konstruieren wir nun eine neue Art von Elementen:

Es sei $\varphi_i(u)$ eine unendliche Folge $\in \mathsf{K}(u)$, $\varphi_0(u) \neq 0$ und m eine ganze Zahl $\gtreqless 0$. Wir bilden den Ausdruck

$$f(u, v) = \varphi_0(u)\, v^m + \varphi_1(u)\, v^{m-1} + \varphi_2(u)\, v^{m-2} + \cdots.$$

Es ist zu beachten, daß die Exponenten von v fallen, während die von u steigen. Zu der Menge dieser Ausdrücke nehmen wir die Null hinzu.

Wir definieren nun:

$f = \bar{f}$, wenn entweder beide gleich Null, oder wenn $m = \bar{m}$ und $\varphi_i(u) = \bar{\varphi}_i(u)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

$f_1 + f_2$ wird durch Addition entsprechender Koeffizienten $\varphi(u)$ erhalten.

Ferner soll ein nichtkommutatives Produkt definiert werden. Zu diesem Zweck führen wir folgende Hilfsbegriffe ein:

a) *Das Normalprodukt* $f(u, v) \times g(u, v)$ soll durch „normales" Ausmultiplizieren gebildet werden:

Ist

$$f = \varphi_0(u)\, v^m + \varphi_1(u)\, v^{m-1} + \cdots$$
$$g = \psi_0(u)\, v^n + \psi_1(u)\, v^{n-1},$$

so soll sein:

$$f \times g = \varphi_0 \psi_0\, v^{m+n} + (\varphi_0 \psi_1 + \varphi_1 \psi_0)\, v^{m+n-1} + (\varphi_0 \psi_2 + \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_0)\, v^{m+n-2} + \cdots.$$

b) *Partielle Ableitungen* sind rein formal zu bilden:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \varphi_0'(u)\, v^m + \varphi_1'(u)\, v^{m-1} + \cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = m\, \varphi_0(u)\, v^{m-1} + (m-1)\, \varphi_1(u)\, v^{m-2} + \cdots.$$

c) Es sei $f_i(u, v)$ eine unendliche Folge:

$$f_1 = \varphi_0^{(1)} v^{n_1} + \varphi_1^{(1)} v^{n_1 - 1} + \cdots \qquad \varphi_0^{(1)} \neq 0$$
$$f_2 = \varphi_0^{(2)} v^{n_2} + \varphi_2^{(2)} v^{n_2 - 1} + \cdots \qquad \varphi_0^{(2)} \neq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bei der die n_i monoton fallen:

$$n_1 > n_2 > n_3 > \cdots.$$

Jede fest gewählte Potenz von v kommt dann höchstens in endlich viele $f_i(u, v)$ vor und man kann daher in sinnvoller Weise *die unendliche Summe*

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

definieren durch die Vorschrift, daß entsprechende Koeffizienten zu addieren sind.

Die Definition des nichtkommutativen Produkts lautet nun:

$$f(u,v) \cdot g(u,v) = f \times g + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \cdots .$$

Nach c) ist diese unendliche Summe sinnvoll, da wegen der partiellen Ableitungen $\partial^\nu f / \partial v^\nu$ die n_i monoton fallen.

BEWEIS DER KÖRPERGESETZE.

Im folgenden soll nachgewiesen werden, daß die Menge der $f(u, v)$ bezüglich der angegebenen Verknüpfungen einen nichtkommutativen Körper bilden.

Hierfür werden zunächst einige Hilfsmittel zusammengestellt.

DEFINITION. *Ist* $f(u,v) = \varphi_0(u) v^m + \varphi_1(u) v^{m-1} + \cdots$ *mit* $\varphi_0(u) \neq 0$, *so soll* m *der Grad von* f *heißen.*

DEFINITION. *Die Elemente* $f(u,v)$, $g(u,v)$ *heißen* p*-äquivalent, in Zeichen*

$$f \underset{p}{\sim} g,$$

wenn $f - g$ *entweder gleich Null oder höchstens vom Grad* $p-1$.

Für jedes feste p ist diese Relation offenbar eine Äquivalenzrelation.

HILFSSATZ 1. *Ist* $f \underset{p}{\sim} g$ *für jedes beliebige — noch so kleine —* p *erfüllt, so ist* $f = g$ *und umgekehrt.* Beweis trivial.

HILFSSATZ 2. *Hat das Produkt* $f\,g$ *den Grad* M *und ist* k *eine ganze Zahl* $\geqq 0$, *so gilt*

$$f\,g \underset{M-k}{\sim} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu} .$$

BEWEIS. Nach Definition ist

$$f\,g = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu} ,$$

also

$$f\,g - \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu} = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu} .$$

Die rechte Seite ist entweder gleich Null oder hat höchstens den Grad $M - k -$ q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen nun zum Beweis der Körpergesetze. Gleichheit und Summe haben offenbar die üblichen Eigenschaften.

Beweis des distributiven Gesetzes $f(g+h)=fg+fh$. Wir nehmen zunächst $f(g+h)\neq 0$ an, etwa vom Grad M, und wählen irgendeine ganze Zahl $k\geqq 0$.

Nach Hilfssatz 2 ist dann:

$$f(g+h)\underset{M-k}{\sim}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}(g+h)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu}+\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu h}{\partial u^\nu}$$

$$\underset{M-k}{\sim}fg+fh.$$

Da hier k jede ganze Zahl $\geqq 0$ sein kann, ist nach Hilfssatz 1

$$f(g+h)=fg+fh.$$

Der Fall $f(g+h)=0$ läßt sich wegen der Nullteilerfreiheit des Produkts ebenfalls leicht erledigen.

Ganz entsprechend kann man den Beweis für $(f+g)h=fh+gh$ führen.

Beweis des Assoziativgesetzes:

Wir nehmen dabei an, daß keiner der Faktoren f, g, h verschwindet. Sei M der Grad von $f(gh)$ und k wieder eine beliebig gewählte ganze Zahl $\geqq 0$. Wir geben zuerst ein Element A an mit

$$f(gh)\underset{M-k}{\sim}A,$$

dann ein Element A' mit

$$(fg)h\underset{M-k}{\sim}A'$$

und zeigen schließlich $A=A'$.

(a)
$$f(gh)\underset{M-k}{\sim}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu(gh)}{\partial u^\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda g}{\partial v^\lambda}\times\frac{\partial^\lambda h}{\partial u^\lambda}\right)$$

$$\underset{M-k}{\sim}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\sum_{\lambda=0}^{k-\nu}\frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda g}{\partial v^\lambda}\times\frac{\partial^\lambda h}{\partial u^\lambda}.$$

Wegen der partiellen Ableitungen nach v haben nämlich die fortgelassenen Glieder höchstens den Grad $M-k-1$. Es ist also:

$$f(gh)\underset{M-k}{\sim}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\sum_{\lambda=0}^{k-\nu}\frac{1}{\lambda!}\sum_{\sigma=0}^{\nu}\binom{\nu}{\sigma}\frac{\partial^{\lambda+\nu-\sigma}g}{\partial v^\lambda\,\partial u^{\nu-\sigma}}\times\frac{\partial^{\lambda+\sigma}h}{\partial u^{\lambda+\sigma}}$$

$$=\sum\frac{1}{\nu!}\frac{1}{\lambda!}\binom{\nu}{\sigma}\frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu}\times\frac{\partial^{\lambda+\nu-\sigma}g}{\partial v^\lambda\,\partial u^{\nu-\sigma}}\times\frac{\partial^{\lambda+\sigma}h}{\partial u^{\lambda+\sigma}}=A.$$

Zu summieren ist über die Tripel ν, λ, σ mit

1. $\nu, \lambda, \sigma \geqq 0$. 2. $\nu \leqq k$. 3. $\nu + \lambda \leqq k$. 4. $\sigma \leqq \nu$.

(b)
$$(f\,g)\,h \underset{M-k}{\sim} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu (f\,g)}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu h}{\partial u^\nu}$$

$$\underset{M-k}{\sim} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial v^\nu} \left(\sum_{\lambda=0}^{k-\nu} \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda f}{\partial v^\lambda} \times \frac{\partial^\lambda g}{\partial u^\lambda} \right) \times \frac{\partial^\nu h}{\partial u^\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} \sum_{\lambda=0}^{k-\nu} \frac{1}{\lambda!} \sum_{\sigma=0}^{\nu} \binom{\nu}{\sigma} \frac{\partial^{\lambda+\sigma} f}{\partial v^{\lambda+\sigma}} \times \frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial u^\lambda \partial v^{\nu-\sigma}} \times \frac{\partial^\nu h}{\partial u^\nu}$$

$$= \sum \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\lambda!} \binom{\nu}{\sigma} \frac{\partial^{\lambda+\sigma} f}{\partial v^{\lambda+\sigma}} \times \frac{\partial^{\lambda+\nu-\sigma} g}{\partial u^\lambda \partial v^{\nu-\sigma}} \times \frac{\partial^\nu h}{\partial u^\nu} = A'.$$

c) Um zu zeigen, daß $A = A'$, führen wir in A' neue Summationsindizes ein

$$\bar{\nu} = \lambda + \sigma, \qquad \bar{\lambda} = \nu - \sigma, \qquad \bar{\sigma} = \sigma.$$

Aus A' wird dann:

$$\sum \frac{1}{(\bar{\lambda} + \bar{\sigma})!} \frac{1}{(\bar{\nu} - \bar{\sigma})!} \binom{\bar{\lambda} + \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^{\bar{\nu}} f}{\partial v^{\bar{\nu}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu}+\bar{\lambda}-\bar{\sigma}} g}{\partial u^{\bar{\nu}-\bar{\sigma}} \partial v^{\bar{\lambda}}} \times \frac{\partial^{\bar{\lambda}+\bar{\sigma}} h}{\partial u^{\bar{\lambda}+\bar{\sigma}}}$$

$$= \sum \frac{1}{\bar{\nu}!} \frac{1}{\bar{\lambda}!} \binom{\bar{\nu}}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^{\bar{\nu}} f}{\partial v^{\bar{\nu}}} \times \frac{\partial^{\bar{\nu}+\bar{\lambda}-\bar{\sigma}} g}{\partial u^{\bar{\nu}-\bar{\sigma}} \partial v^{\bar{\lambda}}} \times \frac{\partial^{\bar{\lambda}+\bar{\sigma}} h}{\partial u^{\bar{\lambda}+\bar{\sigma}}}.$$

Die $\bar{\nu}, \bar{\lambda}, \bar{\sigma}$ durchlaufen dabei ebenfalls sämtliche Tripel mit den Eigenschaften 1. bis 4. wie unmittelbar an den Substitutionsgleichungen zu sehen. Also ist $A = A'$ und somit

$$f(g\,h) \underset{M-k}{\sim} (f\,g)\,h.$$

Da k hier wieder jede ganze Zahl $\geqq 0$ sein kann, besagt dies

$$f(g\,h) = (f\,g)\,h, \quad \text{q.e.d.}$$

EXISTENZ DES INVERSEN:

Die Menge der $f(u, v)$ ist als Körper erwiesen, wenn noch gezeigt ist, daß es zu jedem $f(u, v) \neq 0$ ein Element $g(u, v)$ gibt mit $fg = 1$.

Zum Beweise nehmen wir an:

$$f = \varphi_0(u)\, v^m + \varphi_1(u)\, v^{m-1} + \cdots, \qquad \varphi_0 \neq 0$$

und machen für g den Ansatz

$$g = \psi_0(u)\, v^n + \psi_1(u)\, v^{n-1} + \cdots.$$

Hierin ist notwendig $n = -m$ zu setzen, da der Grad des Produkts gleich $m+n$ ist, andererseits gleich 0 werden soll. Im übrigen erhalten wir durch Ausmultiplizieren gemäß der Produktdefinition die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten ψ_i:

$$\varphi_0 \psi_0 = 1$$

$$(\varphi_0 \psi_1 + \varphi_1 \psi_0) + m\, \varphi_0 \psi_0' = 0$$

$$(\varphi_0 \psi_2 + \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_0) + \frac{1}{1!} (m\, \varphi_0 \psi_1' + (m-1)\, \varphi_1 \psi_0') + \frac{m(m-1)}{2!} \varphi_0 \psi_0'' = 0$$

. . . . . .

Hieraus lassen sich die ψ_i rekursiv berechnen ($\varphi_0 \neq 0$). Aus der 0-ten Gleichung erhält man $\psi_0 = \frac{1}{\varphi_0}$ und allgemein aus der n-ten ψ_n, denn diese enthält ψ_n mit dem Faktor φ_0 und sonst von den ψ_i nur mehr die schon festgelegten $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$. Es ist somit auch die Existenz des Inversen gesichert.

Die Menge der $f(u, v)$ bilden demnach einen Körper $\mathsf{SK} = \mathsf{K}(u, v)$. SK *enthält einen zum Ring* $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ *isomorphen Unterring, und zwar wird dieser gebildet von den speziellen Elementen*

$$\varphi_0(u) + \varphi_1(u)\, v^{-1} + \varphi_2(u)\, v^{-2} + \cdots + \varphi_n(u)\, v^{-n},$$

deren Koeffizienten $\varphi_i(u)$ Polynome in u sind. Es ist damit die Einbettung des Rings $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ *in einen Körper vollzogen.*

§ 4. Die Transformation $\mathfrak{T}$

In § 2 wurde der von den Polynomkernen $K(s, t)$ gebildete Ring isomorph in den Ring $\mathsf{K}[u, v^{-1}]$ abgebildet vermöge

$$K(s,t) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s)\frac{(s-t)}{1!} + \cdots + \varphi_n(s)\frac{(s-t)^n}{n!} \to \varphi_0(u)\, v^{-1} + \cdots + \varphi_n(u)\, v^{-n-1}.$$

Der Volterraschen Komposition der Urelemente entspricht dabei das Produkt der Bildelemente.

Diese Abbildung soll nun erweitert werden auf die Klasse C_δ der für

$$|s| < \delta, \qquad |t| < \delta$$

analytischen Funktionen $F(s, t)$. Die Bilder werden dabei dem Schiefkörper SK entnommen.

Definition von $\mathfrak{T}$. *Man entwickle die Funktion $F(s, t) \in C_\delta$ in bezug auf t nach Potenzen von $(s-t)$:*

$$F(s,t) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s)\frac{(s-t)}{1!} + \varphi_2(s)\frac{(s-t)^2}{2!} + \cdots.$$

Diese Entwicklung ist für jedes s mit $|s| < \delta$ eindeutig, und zwar ist nach Taylor:

$$\varphi_\nu(s) = (-1)^\nu \left.\frac{\partial^\nu F}{\partial t^\nu}\right|_{t=s}$$

An Hand dieser Entwicklung definieren wir die Zuordnung $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}\{F\} = \varphi_0(u)\, v^{-1} + \varphi_1(u)\, v^{-2} + \cdots$$

Das Bild liegt dabei in SK.

$\mathfrak{T}$ ist offenbar bezüglich der Addition ein Isomorphismus. Um auch bezüglich der Multiplikationen einen Isomorphismus zu erreichen, geben wir die

Definition. *Sind $F, G \in C_\delta$, so soll sein*

$$F * G = \int_t^s F(s, \sigma)\, G(\sigma, t)\, d\sigma, \qquad |s| < \delta, \qquad |t| < \delta.$$

Dieses Produkt gehört offenbar ebenfalls zu C_δ. Es gilt nun der SATZ:

$$\mathfrak{T}\{F * G\} = \mathfrak{T}\{F\}\,\mathfrak{T}\{G\}.$$

Es geht also die Volterrasche Komposition der analytischen Funktionen $F(s,t)$, $G(s,t)$ in das Produkt ihrer Bilder über.

BEWEIS. Wir werden einerseits für die Entwicklung

$$\int_t^s F(s,\sigma)\,G(\sigma,t)\,d\sigma = \varrho_0(s)\,\frac{(s-t)}{1!} + \varrho_1(s)\,\frac{(s-t)^2}{2!} + \cdots$$

die $\varrho_\nu(s)$ berechnen, andererseits für das Produkt der Bilder

$$\mathfrak{T}\{F\}\,\mathfrak{T}\{G\} = \chi_0(u)\,v^{-2} + \chi_1(u)\,v^{-3} + \cdots$$

die χ_ν, wobei sich $\varrho_\nu = \chi_\nu$ ergeben wird.

a) Setzt man

$$H(s,t) = \int_t^s F(s,\sigma)\,G(\sigma,t)\,d\sigma,$$

so ist

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu+1}\,\frac{\partial^{\nu+1}H}{\partial t^{\nu+1}}\Big|_{t=s}$$

Explizit:

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = F(s,t)\,G(t,t) + \int_s^t F(s,\sigma)\,\frac{\partial G(\sigma,t)}{\partial t}\,d\sigma$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(F(s,t)\,G(t,t)\right) + F(s,t)\,\frac{\partial G(\sigma,t)}{\partial t}\Big|_{\sigma=t} + \int_s^t F(s,\sigma)\,\frac{\partial^2 G(\sigma,t)}{\partial t^2}\,d\sigma$$

. . . . . .

$$-\frac{\partial^{\nu+1}H}{\partial t^{\nu+1}} = \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left(F(s,t)\,G(t,t)\right) + \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}}\left(F(s,t)\,\frac{\partial G(\sigma,t)}{\partial t}\Big|_{\sigma=t}\right) +$$

$$+ \cdots + F(s,t)\,\frac{\partial^\nu G(\sigma,t)}{\partial t^\nu}\Big|_{\sigma=t} + \int_s^t F(s,\sigma)\,\frac{\partial^{\nu+1}G(\sigma,t)}{\partial t^{\nu+1}}\,d\sigma.$$

Hierbei ist:

$$\frac{\partial^\nu F}{\partial t^\nu}(s,t) = (-1)^\nu\left(\varphi_\nu(s) + \varphi_{\nu+1}\,\frac{(s-t)}{1!} + \cdots\right), \qquad \frac{\partial^\nu G(\sigma,t)}{\partial t^\nu}\Big|_{\sigma=t} = (-1)^\nu\,\psi_\nu(t).$$

Dies geht für $t=s$ über in:

$$(-1)^\nu\,\varphi_\nu(s) \quad \text{bzw.} \quad (-1)^\nu\,\psi_\nu(s).$$

Setzt man symbolisch

$$(-1)^\nu\,\varphi_\nu(s) = \varphi^{(\nu)},$$

so erhält man schließlich:

$$(-1)^\nu\,\varrho_\nu(s) = -\frac{\partial^{\nu+1}H}{\partial t^{\nu+1}}\Big|_{t=s} = (\varphi_0\,\psi_0)^{(\nu)} - (\varphi_0\,\psi_1)^{(\nu-1)} + \cdots + (-1)^\nu\,\varphi_0\,\psi_\nu.$$

b) Wir berechnen die ψ_ν gemäß der Produktdefinition

$$fg = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial v^\nu} \times \frac{\partial^\nu g}{\partial u^\nu}:$$

$$\chi_0 = \varphi_0 \psi_0$$

$$(-1)\chi_1 = (-\varphi_1 \psi_0 + \varphi_0 \psi_0') + \varphi_0 \psi_1$$

$$(-1)^2 \chi_2 = \left(\binom{2}{0} \varphi_2 \psi_0 - \binom{2}{1} \varphi_1 \psi_0' + \binom{2}{2} \varphi_0 \psi_0''\right) - (-\varphi_1 \psi_1 + \varphi_0 \psi_1') + \varphi_0 \psi_2.$$

ist hierbei nach dem Index von ψ geordnet worden. Setzen wir symbolisch

$$(-1)^\nu \varphi_\nu = \varphi^{(\nu)},$$

können wir einfacher schreiben:

$$(-1)^2 \chi_2 = (\varphi_0 \psi_0)'' - (\varphi_0 \psi_1)' + (\varphi_0 \psi_2)^{(0)}.$$

lgemein liefert die Produktdefinition:

$$(-1)^\nu \chi_\nu = (\varphi_0 \psi_0)^\nu - (\varphi_0 \psi_1)^{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu \varphi_0 \psi_\nu.$$

ist also tatsächlich

$$\varphi_\nu = \chi_\nu$$

d somit

$$\mathfrak{T}\{F * G\} = \mathfrak{T}\{F\}\,\mathfrak{T}\{G\}, \qquad \text{q.e.d.}$$

§ 5. Umkehrung der Transformation $\mathfrak{T}$

$\mathfrak{T}$ ordnet jeder analytischen Funktion aus C_δ in eindeutiger Weise ein ement aus dem Schiefkörper SK zu. Im folgenden taucht die Frage auf, es umgekehrt zu einem vorgegebenen Element $g \in \mathsf{SK}$ eine Funktion $G(s,t)$ t $\mathfrak{T}\{G\} = g$ gibt. Es existiert offenbar nicht zu jedem $g \in \mathsf{SK}$ eine solche funktion G, denn hierfür ist zunächst notwendig, daß g die Form $\varphi_0 v^{-1} + v^{-2} + \cdots$ hat. Jedoch sind auch unter den Elementen dieser Art noch solche, e keine Urfunktion G besitzen, wie z.B. $g = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu!)^2 v^{-\nu-1}$.

Definition. *Ein Element g aus* SK *heiße Funktionselement, wenn es dazu ne in einer gewissen Umgebung $|s| < \delta$, $|t| < \delta$ analytische Funktion $G(s,t)$ t mit*

$$\mathfrak{T}\{G\} = g.$$

Mit gebräuchlichen Mitteln beweist man den

Satz 5.1. *Ist $g \in \mathsf{SK}$ Funktionselement und sind $G_1(s,t)$, $G_2(s,t)$ beide Urnktionen von g, etwa mit dem gemeinsamen Regularitätsbereich $|s| < \delta$, $< \delta$, so sind sie dort identisch.*

In diesem Sinne ist also die Urfunktion eines Funktionselements eindeutig stimmt.

Das zu einem Funktionselement g gehörige Urbild kann man aus g dire bestimmen nach dem

SATZ 5.2. *Ist*

$$g = \varphi_0(u)\, v^{-1} + \varphi_1(u)\, v^{-2} + \cdots$$

Funktionselement und ist die zugehörige Urfunktion $G(s,t)$ für $|s|<\delta$, $|t|<$ analytisch, so gilt für $|s| < \frac{\delta}{3}$, $|t| < \frac{\delta}{3}$

$$G(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(s)\, \frac{(s-t)^\nu}{\nu!}.$$

BEWEIS. Bei $G(s,t)$ werde die Variable s fixiert, und zwar mit $|s|<$ und $G(s,t)$ in bezug auf t nach $(s-t)$ entwickelt:

$$G(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\varphi}_\nu(s)\, \frac{(s-t)^\nu}{\nu!}.$$

Diese Reihe konvergiert für $|s-t| < \frac{2\delta}{3}$, also bei unserer Wahl von s f $|t| < \frac{\delta}{3}$. Da $\mathfrak{T}\{G\}=g$ sein soll, ist $\overline{\varphi}_\nu = \varphi_\nu$. Für $|s| < \frac{\delta}{3}$, $|t| < \frac{\delta}{3}$ konvergie also $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(s) \frac{(s-t)^\nu}{\nu!}$ gegen $G(s,t)$, q.e.d.

Ferner brauchen wir im folgenden den

SATZ 5.3. *Sind f, g Funktionselemente, etwa mit den Urfunktionen F, die in $|s|<\delta$, $|t|<\delta$ analytisch sein mögen, so sind auch $f \pm g$, fg Funktion elemente, und zwar gehören dazu bzw. die Funktionen $F \pm G$, $\int_t^s F(s,\sigma)\, G(\sigma,t)\, d$*

Beweis trivial.

Das Inverse g^{-1} eines von Null verschiedenen Funktionselements g i nicht wieder Funktionselement, da g^{-1} einen positiven Grad hat. Dageg kann es sein, daß g^{-1} Funktionselement ist, wenn es g selbst nicht ist. F die Auflösung der linearen Differentialgleichung ist grundlegend der

SATZ 5.4. *Ist bei dem Element aus*

$$h = v^n + a_1(u)\, v^{n-1} + \cdots + a_n(u)$$

n eine natürliche Zahl und sind die $a_i(u)$ so beschaffen, daß daraus durch Ersetzung $u \to s$ Funktionen $a_i(s)$ entstehen, die sämtlich in einer Umgebu $|s|<\delta$ analytisch sind, so ist

$$h^{-1} = v^{-n} + \psi_1\, v^{-n-1} + \cdots$$

Funktionselement.

Dem Beweis dient der

HILFSSATZ. *Hat h die Bedeutung des letzten Satzes, so gibt es eine „Ze legung in Linearfaktoren“*

$$h = \big(v + \varphi_1(u)\big)\big(v + \varphi_2(u)\big) \ldots \big(v + \varphi_n(u)\big),$$

ren $\varphi_i(u)$ durch die Ersetzung $u \to s$ in Funktionen übergehen, die in einer wissen Umgebung $|s| < \delta'$ analytisch sind.

BEWEIS. Neben h betrachte man den „Differentialoperator"

$$D^n + a_1(s)\, D^{n-1} + \cdots + a_n(s).$$

ieser gestattet bekanntlich eine Zerlegung

$$(D + \varphi_1(s)) \ldots (D + \varphi_n(s))^{2}) \qquad \text{(I)}$$

it Funktionen $\varphi_i(s)$, die in einer gewissen Umgebung $|s| < \delta$ analytisch sind. iese Zerlegung kann man nun auf h übertragen. Ordnet man nämlich allmein dem Differentialoperator

$$a_0(s)\, D^n + a_1(s)\, D^{n-1} + \cdots + a_n(s)$$

it um 0 analytischen $a_i(s)$ das Element

$$a_0(u)\, v^n + a_1(u)\, v^{n-1} + \cdots + a_n(u)$$

1, so ist dies offenbar ein Isomorphismus, weil einerseits für D die Vertauschungsrelation

$$D f(s) = f(s)\, D + f'(s)$$

ilt, andererseits für v die Vertauschungsrelation

$$v f(u) = f(u)\, v + f'(u),$$

as aus der Produktdefinition für SK folgt.

Nimmt man also in der Zerlegung (I) die Ersetzungen $s \to u$, $D \to v$ vor, o erhält man die behauptete Zerlegung von h.

Nun zum Beweis des letzten Satzes:

a) Sei $n = 1$, also

$$h = v + \varphi(u)$$

nd

$$h^{-1} = v^{-1} + \chi_1 v^{-2} + \chi_2 v^{-3} + \cdots$$

(s) sei für $|s| < \delta$ analytisch.

Wir zeigen, daß h^{-1} die Urfunktion

$$G(s,t) = e^{-\Phi(s)+\Phi(t)} \quad \text{mit} \quad \Phi(s) = \int_0^s \varphi(\sigma)\, d\sigma, \qquad |s| < \delta$$

esitzt.

Für $|s| < \delta$ und genügend benachbarte t gilt

$$G(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(s) \frac{(s-t)^\nu}{\nu!},$$

obei

$$\psi_\nu(s) = (-1)^\nu \frac{\partial^\nu G}{\partial t^\nu}\Big|_{t=s} = (-1)^\nu e^{-\Phi(s)} \frac{d^\nu e^{\Phi(s)}}{d s^\nu}.$$

[2]) Siehe etwa: SCHLESINGER, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Durch Differentiation nach s folgt die Rekursionsformel:

$$\psi_{\nu+1} + \psi_\nu \varphi + \psi_\nu' = 0.$$

Andererseits sind die χ_ν festgelegt durch

$$(v + \varphi)(v^{-1} + \chi_1 v^{-2} + \chi_2 v^{-3} + \cdots) = 1.$$

Explizit:

$$\chi_0 + (\chi_1 + \chi_0 \varphi + \chi_0') v^{-1} + \cdots + (\chi_{\nu+1} + \chi_\nu \varphi + \chi_\nu') v^{\nu+1} + \cdots = 1.$$

Hieraus folgt

$$\chi_0 = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\chi_{\nu+1} + \chi_\nu \varphi + \chi_\nu' = 0.$$

Die χ_ν genügen also derselben Rekursionsformel wie die ψ_ν. Außerdem i
$\psi_0 = \chi_0 = 1$. Somit ist

$$\psi_\nu = \chi_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

und das besagt: $G(s, t)$ hat h^{-1} als Bild.

b) Im Falle $n > 1$ zerlegen wir:

$$h = (v + \varphi_1(u))(v + \varphi_2(u)) \ldots (v + \varphi_n(u)),$$

was nach dem Hilfssatz möglich ist. Die den $\varphi_i(u)$ entsprechenden $\varphi_i(s)$ sei
dabei sämtlich für $|s| < \delta'$ analytisch. Nach a) gibt es zu jedem Fakt
$v + \varphi_i(u)$ eine Urfunktion $G_i(s, t)$. Das Produkt hat daher nach §4 die U
funktion

$$G_1 * G_2 * \ldots * G_n,$$

wobei dieses Produkt als Volterrasche Komposition zu lesen ist.

§6. Hilfssätze über die Transformation $\mathfrak{T}$

Die folgenden Hilfssätze werden für die Behandlung der linearen Dif
rentialgleichung benötigt.

HILFSSATZ 6.1. *Ist für die um 0 analytische Funktion* $G(s, t)$

$$\mathfrak{T}\{G(s, t)\} = g,$$

so gilt:

$$\mathfrak{T}\left\{-\frac{\partial G}{\partial t}\right\} = g v - G(u, u),$$

wobei $G(u, u)$ *dasjenige Körperelement aus* SK *ist, das aus* $G(s, s)$ *durch*
Ersetzung $s \to u$ *hervorgeht.*

BEWEIS. Sei

$$G(s, t) = \psi_0(s) + \psi_1(s) \frac{(s-t)}{1!} + \psi_2(s) \frac{(s-t)^2}{2!} + \cdots$$

Dann ist

$$-\frac{\partial G}{\partial t} = \psi_1(s) + \psi_2 \frac{(s-t)^{1\prime\prime}}{1!} + \cdots$$

und

$$\mathfrak{T}\{G\} = \psi_0(u)\, v^{-1} + \psi_1(u)\, v^{-2} + \cdots$$

$$\mathfrak{T}\left\{-\frac{\partial G}{\partial t}\right\} = \psi_1(u)\, v^{-1} + \psi_2(u)\, v^{-2} + \cdots$$

Zwischen den Bildern besteht offenbar die Beziehung

$$\mathfrak{T}\left\{-\frac{\partial G}{\partial t}\right\} = \mathfrak{T}\{G\}\, v - \psi_0(u)\,,$$

die mit der Behauptung gleichbedeutend ist.

Wiederholte Anwendung ergibt:

$$(-1)^\nu \mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^\nu G}{\partial t^\nu}\right\} = \mathfrak{T}\{G\}\, v^\nu - \psi_0(u)\, v^{\nu-1} - \cdots - \psi_{\nu-1}(u).$$

Folgerungen. a) Es sei $G(s, t)$ nur von $(s-t)$ abhängig:

$$G(s, t) = Y(s-t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s-t)^i\,.$$

$Y'(s-t)$ sei die Ableitung nach $(s-t)$. Dann gilt nach 6.1:

$$\mathfrak{T}\{Y'(s-t)\} = \mathfrak{T}\{Y\}\, v - Y(0)$$

und allgemein:

$$\mathfrak{T}\{Y^{(\nu)}(s-t)\} = \mathfrak{T}\{Y\}\, v^\nu - Y(0)\, v^{\nu-1} - \cdots - Y^{\nu-1}(0).$$

b) Hat $G(s, t)$ die Gestalt

$$\psi_k(s)\,\frac{(s-t)^k}{k!} + \psi_{k+1}(s)\,\frac{(s-t)^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots,$$

wobei k eine natürliche Zahl, ist also $\psi_0 = \cdots \psi_{k-1} = 0$, so hat man nach 6.1 für $\nu = 1, \ldots, k$ die vereinfachte Formel:

$$(-1)^\nu \mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^\nu G}{\partial t^\nu}\right\} = \mathfrak{T}\{G\}\, v^\nu.$$

Umgekehrt kann man schließen: Ist g ein Funktionselement von der Form

$$\psi_k(u)\, v^{-k-1} + \psi_{k+1}(u)\, v^{-k-2} + \cdots$$

mit der zugehörigen Urfunktion

$$G(s, t) = \psi_k(s)\,\frac{(s-t)^k}{k!} + \psi_{k+1}(s)\,\frac{(s-t)^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots$$

und ist ν eine natürliche Zahl $\leqq k$, so ist auch $g\, v^\nu$ ein Funktionselement, nämlich nach Obigem das Abbild von

$$(-1)^\nu \frac{\partial^\nu G}{\partial t^\nu}\,.$$

Hilfssatz 6.2. *Sind $a(s)$ und $G(s, t)$ um 0 analytisch, so gilt*

$$\mathfrak{T}\{a(s)\, G(s, t)\} = a(u)\, \mathfrak{T}\{G(s, t)\}.$$

BEWEIS. Ist

$$G(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(s) \frac{(s-t)^\nu}{\nu!},$$

so gilt:

$$\mathfrak{T}\{a(s)\,G(s,t)\} = \mathfrak{T}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a(s)\,\psi_\nu(s)\,\frac{(s-t)^\nu}{\nu!}\right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a(u)\,\psi_\nu(u)\,v^{-\nu-1} = a(u)\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(u)\,v^{-\nu-1}$$

$$= a(u)\,\mathfrak{T}\{G(s,t)\} \quad \text{q.e.d.}$$

Ein ähnliches Transformationsgesetz gilt, wenn $a(t)$ eine nur von t abhängige Funktion ist.

HILFSSATZ 6.3. *Sind $G(s,t)$, $a(t)$ analytisch um 0 und hängt $a(t)$ nur von t ab, so gilt:*

$$\mathfrak{T}\{G(s,t)\,a(t)\} = \mathfrak{T}\{G(s,t)\}\cdot a(u).$$

BEWEIS. Wir nehmen den Sonderfall $G=1$ vorweg. Ist $a(t)$ für $|t|<\delta$ analytisch, so gilt für $|s|<\delta$ und benachbarte t:

$$a(t) = a(s) - a'(s)\,\frac{(s-t)}{1!} + a''(s)\,\frac{(s-t)^2}{2!} \mp \cdots.$$

Nach Definition von $\mathfrak{T}$ ist:

$$\mathfrak{T}\{a(t)\} = a(u)\,v^{-1} - a'(u)\,v^{-2} + a''(u)\,v^{-3} \mp \cdots.$$

Dieses Element ist aber identisch mit $v^{-1}\,a(u)$, wie die Produktdefinition für SK ergibt, d.h.

$$\mathfrak{T}\{a(t)\} = v^{-1}\,a(u).$$

Im allgemeinen Fall $G \neq 1$ gehen wir von der Identität

$$G(s,t)\,a(t) = \int_t^s \left(-\frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial t}\right) a(t)\,d\sigma + G(s,s)\,a(t)$$

aus. Nach §4 und Hilfssatz 6.2 ergibt die Anwendung von $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}\{G(s,t)\,a(t)\} = \mathfrak{T}\left\{-\frac{\partial G}{\partial t}\right\}\mathfrak{T}\{a(t)\} + G(u,u)\,\mathfrak{T}\{a(t)\};$$

nach Satz 6.1

$$= \left(\mathfrak{T}\{G\}\cdot v - G(u,u)\right)\mathfrak{T}\{a(t)\} + G(u,u)\,\mathfrak{T}\{a(t)\},$$

nach obigem Teilergebnis

$$= \mathfrak{T}\{G\}\,v\cdot v^{-1}\,a(u).$$

Also:

$$\mathfrak{T}\{G(s,t)\,a(t)\} = \mathfrak{T}\{G\}\,a(u), \quad \text{q.e.d.}$$

Schließlich sei noch ein Transformationsgesetz erwähnt, das einen zweiten einfachen Beweis für den grundlegenden Satz 5.4 ermöglicht.

Es gilt

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right\} = v\,\mathfrak{T}\{G(s,t)\} - G(u,u).$$

Beweis. Es sei

$$G(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu(s)\,\frac{(s-t)^\nu}{\nu!},$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu(s)\,\frac{(s-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu'(s)\,\frac{(s-t)^\nu}{\nu!}.$$

Nach Definition von $\mathfrak{T}$ ist dann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial G}{\partial s}\right\} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu(u)\,v^{-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu'(u)\,v^{-\nu-1}\\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu(u)\,v^{-\nu-1}\right) v - \varrho_0(u) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu'(u)\,v^{-\nu-1}\\ &= \mathfrak{T}\{G\}\,v + \frac{\partial}{\partial u}\,\mathfrak{T}\{G\} - G(u,u).\end{aligned}$$

Die beiden ersten Summanden ergeben nach der Produktdefinition für SK gerade $v\,\mathfrak{T}\{G\}$, womit das Transformationsgesetz bewiesen ist.

Es habe nunmehr h wieder dieselbe Bedeutung wie bei Satz 5.4:

$$h = v^n + a_1(u)\,v^{n-1} + \cdots + a_n(u),$$

wobei die Funktionen $a_i(s)$ der komplexen Veränderlichen s sämtlich um 0 analytisch sind.

Wir beweisen noch einmal, daß h^{-1} Funktionselement ist.

Wir gehen dabei von folgender bekannten Tatsache aus: Es existiert eine um 0 analytische Funktion $G(s,t)$ mit den Eigenschaften:

1. $G(s,t)$ ist in bezug auf s Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^n G(s,t)}{\partial s^n} + a_1(s)\,\frac{\partial^{n-1} G(s,t)}{\partial s^{n-1}} + \cdots + a_n(s)\,G(s,t) = 0.$$

2. Es ist:

$$G(s,s) = \left.\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}\right|_{t=s} = \cdots = \left.\frac{\partial^{n-2} G(s,t)}{\partial s^{n-2}}\right|_{t=s} = 0$$

und

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(s,t)}{\partial s^{n-1}}\right|_{t=s} = 1.$$

Auf die Gl. 1. wende man nun die Transformation $\mathfrak{T}$ an. Unter Beachtung des Hilfssatzes 6.2 erhält man:

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^n G}{\partial s^n}\right\} + a_1(u)\,\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^{n-1} G}{\partial s^{n-1}}\right\} + \cdots + a_n(u)\,\mathfrak{T}\{G\} = 0.$$

Wegen der Eigenschaft 2. ergibt sich nach dem letzten Transformationsgesetz:

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^\nu G}{\partial s^\nu}\right\} = v^\nu\,\mathfrak{T}\{G\} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

und

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{\partial^n G}{\partial s^n}\right\} = v^n\,\mathfrak{T}\{G\} - 1\,.$$

Durch Einsetzen bekommt man:

$$\left(v^n + a_1(u)\,v^{n-1} + \cdots + a_n(u)\right)\mathfrak{T}\{G\} = 1$$

Es ist also

$$\mathfrak{T}\{G\} = h^{-1},$$

d.h. h^{-1} besitzt $G(s,t)$ als Urfunktion.

§ 7. Die lineare Differentialgleichung

Die Transformation $\mathfrak{T}$ soll nun zur Lösung der linearen Differentialgleichun

$$Y^{(n)}(s) + a_1(s)\,Y^{(n-1)}(s) + \cdots + a_n(s)\,Y(s) = F(s) \tag{7.1}$$

angewandt werden. Die $a_i(s)$ sowie $F(s)$ seien für $|s| < \delta$ analytisch.

Sei $Y(s)$ eine für $|s| < 2\delta$ analytische Lösung von 7.1. Dann ist $Y(s -$ für $|s| < \delta$, $|t| < \delta$ analytisch. $Y(s-t)$ wird an Stelle von $Y(s)$ in 7.1 eingesetz Dann kommt rechts statt $F(s)$ eine für $|s| < \delta$, $|t| < \delta$ analytische Funktio $F(s,t)$ mit $F(s,0) = F(s)$:

$$Y^{(n)}(s-t) + a_1(s)\,Y^{(n-1)}(s-t) + \cdots + a_n(s)\,Y(s-t) = F(s,t)\,.$$

Auf diese Gleichung wird nun $\mathfrak{T}$ angewandt. Nach Hilfssatz 6.2 ist

$$\mathfrak{T}\{a_i(s)\,Y^{(i)}(s-t)\} = a_i(u)\,\mathfrak{T}\{Y^{(i)}(s-t)\}\,.$$

Es ergibt sich also:

$$\mathfrak{T}\{Y^{(n)}(s-t)\} + a_1(u)\,\mathfrak{T}\{Y^{(n-1)}(s-t)\} + \cdots + a_n(u)\,\mathfrak{T}\{Y(s-t)\} = \mathfrak{T}\{F(s,t \tag{7.2}$$

Hierin drücken wir nach Hilfssatz 6.1 a) $\mathfrak{T}\{Y^{(i)}(s-t)\}$ durch $\mathfrak{T}\{Y(s-t)\}$ au Dies wird besonders einfach im Falle

a) $$Y(0) = Y'(0) = \cdots = Y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Dann gilt:

$$\mathfrak{T}\{Y^{(i)}(s-t)\} = \mathfrak{T}\{Y(s-t)\}\cdot v^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Da in $\mathfrak{T}\{Y(s-t)\}$ u nicht vorkommt, können wir rechts den Faktor v^i vora stellen. Mit

$$y(v) = \mathfrak{T}\{Y(s-t)\} \quad \text{und} \quad f(u,v) = \mathfrak{T}\{F(s,t)\}$$

ergibt sich die transformierte Gleichung

$$\left(v^n + a_1(u)\,v^{n-1} + \cdots + a_n(u)\right) y(v) = f(u,v)\,,$$

abgekürzt:

$$h(u,v)\,y(v) = f(u,v)\,.$$

Diese Gleichung kann innerhalb SK aufgelöst werden:

$$y = h^{-1} f\,.$$

Zu $y \in \mathsf{SK}$ kann man nun auch die zugehörige Urfunktion $Y(s-t)$ angeben: Nach Satz 5.4 gibt es zu h^{-1} eine Urfunktion $G(s,t)$, die in einer gewissen Umgebung $|s|<\delta$, $|t|<\delta'$ analytisch ist. Außerdem hat f die Urfunktion $F(s,t)$. Zu $h^{-1}f$ gehört daher nach Satz 5.3 die Volterrasche Komposition von G und F. Somit:

$$Y(s-t) = \int_t^s G(s,\sigma)\, F(\sigma,t)\, d\sigma .$$

Hierin ist zwar noch die unbekannte Funktion $F(s,t)$ enthalten, doch ergibt sich für $t=0$ wegen $F(s,0)=F(s)$:

$$Y(s) = \int_0^s G(s,\sigma)\, F(\sigma)\, d\sigma .$$

Im ganzen haben wir also den

Satz. *Berechnet man in* SK *das Inverse*

$$\left(v^n + a_1(u)\, v^{n-1} + \cdots + a_n(u)\right)^{-1} = v^{-n} + \psi_1(u)\, v^{-n-1} + \cdots$$

und geht davon durch die Ersetzungen

$$u \to s, \qquad v^{-i} \to \frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!}$$

zur Urfunktion $G(s,t)$ *über, so hat man in*

$$Y(s) = \int_0^s G(s,\sigma)\, F(\sigma)\, d\sigma$$

diejenige Lösung der Differentialgleichung (7.1), *die der Anfangsbedingung*

$$Y(0) = Y'(0) = \cdots = Y^{(n-1)}(0) = 0$$

genügt. Bei Beschränkung auf reelle s *gilt dies offenbar auch für stetige* $f(s)$.

b) Es seien jetzt irgendwelche Anfangswerte $Y(0)$, $Y'(0)$, …, $Y^{(n-1)}(0)$ vorgegeben. Nach Satz 6.1 a gilt:

$$\mathfrak{L}\{Y^{(i)}(s-t)\} = \mathfrak{L}\{Y(s-t)\}\, v^i - Y(0)\, v^{i-1} - Y'(0)\, v^{i-2} - \cdots - Y^{i-1}(0).$$

Setzt man dies in 7.2 ein und bezeichnet mit y, f wieder die Bilder von $Y(s-t)$ bzw. $F(s,t)$, so folgt:

$$\left(v^n + a_1(u)\, v^{n-1} + \cdots + a_n(u)\right) \cdot y = f + Y(0)\, v^{n-1} + Y'(0)\, v^{n-2} + \cdots + Y^{n-1}(0) +$$
$$+ a_1(u)\left\{Y(0)\, v^{n-2} + \cdots + Y^{(n-2)}(0)\right\} + \cdots + a_{n-1}(u)\, Y(0)$$

abgekürzt:

$$h\, y = f + a .$$

Das Bild von $Y(s-t)$ ist also:

$$y = h^{-1} f + h^{-1} a .$$

Es handelt sich also nur noch darum, die Urfunktion der rechten Seite zu bestimmen. Für $h^{-1}f$ steht sie bereits unter a). $h^{-1}a$ ist eine Linearkombination von Gliedern der Form

$$h^{-1}\, a(u)\, v^{\nu} .$$

Zu jedem solchen Glied läßt sich die Urfunktion angeben: Zunächst gehört nach Hilfssatz 6.3 zu $h^{-1}a(u)$ die Urfunktion $G(s,t)\,a(t)$. Für $h^{-1}a(u)v^{\nu}$ selbst findet man dann die Urfunktion nach Hilfssatz 6.1 b:

$$\mathfrak{T}^{-1}\{h^{-1}a(u)\,v^{\nu}\} = (-1)^{\nu}\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}\{G(s,t)\,a(t)\}.$$

Die Anwendung dieses Satzes ist gerechtfertigt, weil h^{-1} den Grad n besitzt und $\nu \leqq (n-1)$ ist.

Setzt man die einzelnen Urfunktionen in

$$Y(s-t) = \mathfrak{T}^{-1}\{h^{-1}f\} + \mathfrak{T}^{-1}\{h^{-1}a\}$$

ein und nimmt noch die Spezialisierung $t=0$ vor, so ergibt sich der

SATZ. *Bestimmt man im Schiefkörper* SK *das Inverse* h^{-1} *und dazu die Urfunktion* $G(s,t)$, *so kann man die allgemeine Lösung von 7.1 in folgender Form erhalten:*

$$\begin{aligned} Y(s) = &\int_0^s G(s,\sigma)F(\sigma)\,d\sigma + (-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}G(s,t)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=0} Y(0) + \cdots + G(s,0)\,Y^{(n-1)}(0) + \\ &+ (-1)^{n-2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\{G(s,t)\,a_1(t)\}_{t=0}\,Y(0) + \cdots + G(s,0)\,a_1(0)\,Y^{(n-2)}(0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ G(s,0)\,a_{n-1}(0)\,Y(0). \end{aligned}$$

Das Resultat ist bei Beschränkung auf reelle s auch für stetiges $f(s)$ gültig.

COROLLAR. *Für* $F=0$ *wird* $Y(s)$ *eine Linearkombination von*

$$G(s,0), \quad \frac{\partial G(s,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1}G(s,t)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=0}.$$

Diese Funktionen bilden also ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Das Inverse

$$h^{-1} = v^{-n} + \psi_1(u)\,v^{-n-1} + \psi_2(u)\,v^{-n-2} + \cdots$$

liefert demnach ein Fundamentalsystem in Form der folgenden Reihen:

$$\begin{gathered} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \psi_1(s)\frac{s^n}{n!} + \psi_2(s)\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \\ \frac{s^{n-2}}{(n-2)!} + \psi_1(s)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \psi_2(s)\frac{s^n}{n!} + \cdots \\ 1 + \psi_1(s)\frac{s}{1!} + \psi_2(s)\frac{s^2}{2!} + \cdots. \end{gathered}$$

Ähnlich gestaltet sich die Auflösung der adjungierten Differentialgleichung

$$(-1)^n Y^{(n)}(t) + (-1)^{n-1}\left(a_1(t)\,Y(t)\right)^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,Y(t) = F(t)$$

mittels $\mathfrak{T}$. Man nehme zuerst die Modifikation

$$(-1)^n Y^{(n)}(t-s) + (-1)^{n-1}\left(a_1(t)\,Y(t-s)\right)^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)\,Y(t-s) = F^*(s,t)$$

vor. Der Kürze halber beschränken wir uns auf diejenige Lösung $Y(t)$ mit $Y(0) = \cdots = Y^{(n-1)}(0) = 0$. Nach den Hilfssätzen 6.1 und 6.3 ergibt dann die

Anwendung von $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}\{Y(t-s)\}\,v^n + \mathfrak{T}\{Y(t-s)\}\,a_1(u)\,v^{n-1} + \cdots + \mathfrak{T}\{Y(t-s)\}\,a_n(u) = \mathfrak{T}\{F^*\}$$

also:

$$\mathfrak{T}\{Y(t-s)\} = \mathfrak{T}\{F^*\}\,h^{-1}.$$

Es folgt:

$$Y(t-s) = \int_t^s F^*(s,\sigma)\,G(\sigma,t)\,d\sigma$$

und für $s=0$:

$$Y(t) = -\int_0^t G(\sigma,t)\,F(\sigma)\,d\sigma.$$

h^{-1} tritt hier als Rechtsinverses auf, während es oben als Linksinverses fungierte. Dies bringt den Übergang von $G(s,t)$ zu $-G(t,s)$ mit sich.

Bemerkungen. 1. Die Transformation $\mathfrak{T}$ kann auch zur Lösung der Integrodifferentialgleichung

$$Y^{(n)}(s) + a_1(s)\,Y^{(n-1)}(s) + \cdots + a_n(s)\,Y(s) + \int_0^s K(s,\sigma)\,Y(\sigma)\,d\sigma = F(s),$$

bei der $a_i(s)$, $K(s,t)$, $F(s)$ analytische Funktionen sind, angewandt werden. Wir beschränken uns dabei wieder auf diejenige Lösung, die der homogenen Anfangsbedingung genügt. Zur Lösung mittels $\mathfrak{T}$ ersetze man in $Y(s)$ das Argument durch $s-t$, ferner die untere Integrationsgrenze 0 durch t. Auf die entstehende Gleichung

$$Y^{(n)}(s-t) + a_1(s)\,Y^{(n-1)}(s-t) + \cdots + a_n(s)\,Y(s-t) + \\ + \int_t^s K(s,\sigma)\,Y(\sigma-t)\,d\sigma = F^*(s,t),$$

die für $t=0$ in die gegebene Gleichung übergeht, wende man $\mathfrak{T}$ an, was eine einfache algebraische Gleichung

$$h\,\mathfrak{T}\{Y(s-t)\} = \mathfrak{T}\{F^*\}$$

in bezug auf SK ergibt, bei der

$$h = v^n + a_1(u)\,v^{n-1} + \cdots + a_n(u) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu(u)\,v^{-\nu-1}$$

ist, wenn $K(s,t)$ die Entwicklung

$$K(s,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho_\nu(s)\,\frac{(s-t)^\nu}{\nu!}$$

besitzt.
Die Lösung in SK ist:

$$\mathfrak{T}\{Y(s-t)\} = h^{-1}\,\mathfrak{T}\{F^*\}.$$

Man kann zeigen, daß h^{-1} Funktionselement ist. Gehört dazu die Urfunktion $G(s,t)$, so ist nach dem „Faltungssatz"

$$Y(s-t) = \int_t^s G(s,\sigma)\,F^*(\sigma,t)\,d\sigma,$$

also

$$Y(s) = \int_0^s G(s,\sigma)\, F(\sigma)\, d\sigma .$$

Dieses Resultat ist bei Beschränkung auf reelle s auch für stetiges $F(s)$ gültig.

2. Es möge noch angedeutet werden, wie sich die hier angegebene Methode mit dem Kalkül von MIKUSINSKI in Zusammenhang bringen läßt.

Die Grundlage für diesen Kalkül ist bekanntlich ein gewisser kommutativer Körper MK, dessen Produkt mittels der Faltung zweier Funktionen eingeführt wird. Dieser bietet den Vorteil, daß er sowohl Funktionen wie Operatoren umfaßt. Beispielsweise läßt sich die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t),$$

deren Koeffizienten *konstant* sind, direkt als Gleichung in MK schreiben:

$$s^n\{y\} + \alpha_1 s^{n-1}\{y\} + \cdots + \alpha_n\{y\} = \{f\}.$$

Wie bei MIKUSINSKI bedeutet hierbei s den Differentiationsoperator, der als das Inverse des Integrationsoperators definiert ist. Ferner ist:

$$\alpha_i = \frac{\{a_i\}}{\{1\}}.$$

Leider ist jedoch der Mikusinskische Kalkül auf Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten beschränkt. Nach Vorhergehendem läßt sich aber leicht ein „Operatorkörper" angeben, der auch den Fall analytischer Koeffizienten erfaßt: Man gehe nämlich aus von der Menge der komplexen Funktionen $K(s,t)$, die um 0 analytisch sind, definiere für sie das Produkt als Volterrasche Komposition

$$\{K_1\}\{K_2\} = \int_t^s K_1(s,\sigma)\, K_2(\sigma,t)\, d\sigma$$

und hat dann, wenn man noch die gewöhnliche Summe als erste Verknüpfung nimmt, einen gewissen Ring $\mathfrak{V}$. Nach §4 läßt sich $\mathfrak{V}$ isomorph in den Schiefkörper SK abbilden. Daher ist $\mathfrak{V}$ in einen Körper einbettbar.

Man kann nun ähnlich wie MIKUSINSKI vorgehen:

Die Funktion $\{1\}$ wird als „Integrationsoperator l" eingeführt. Nach Definition des Produkts für $\mathfrak{V}$ ist dann:

$$l^n = \left\{\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right\}.$$

Der „Operator der Differentiation" kann nun definiert werden durch

$$D = l^{-1}.$$

Für eine Funktion $y(s-t)$ von $s-t$ allein gilt dann offenbar:

$$D\{y(s-t)\} = \{y'(s-t)\} + D\{y(0)\}.$$

tzt man in Analogie zu MIKUSINSKI

$$\{a(s)\}\, D = \alpha,$$

erhält man für die der homogenen Anfangsbedingung genügende Lösung von

$$y^{(n)}(s-t) + a_1(s)\, y^{(n-1)}(s-t) + \cdots + a_n(s)\, y(s-t) = f^*(s,t)$$

„Operatorgleichung"

$$(D^n + \alpha_1 D^{n-1} + \cdots + \alpha_n)\, \{y(s-t)\} = \{f^*\},$$

im „Operatorkörper" die Lösung

$$\{Y(s-t)\} = (D^n + \alpha_1 D^{n-1} + \cdots + \alpha_n)^{-1} \{f^*\}$$

sitzt. Unter Zuhilfenahme von Satz 5.4 läßt sich nun beweisen, daß das verse

$$(D^n + \alpha_1 D^{n-1} + \cdots + \alpha_n)^{-1}$$

it der bereits benutzten Funktion $G(s,t)$ identisch ist, so daß also die Lösung Operatorkörper auch in der Form

$$\{y(s-t)\} = \{G(s,t)\}\, \{f^*(s,t)\}$$

schrieben werden kann. Wegen der getroffenen Produktdefinition ist dies eichbedeutend mit:

$$y(s-t) = \int_t^s G(s,\sigma)\, f^*(\sigma,t)\, d\sigma,$$

as für $t=0$ die Lösung

$$Y(s) = \int_0^s G(s,\sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma$$

gibt.

3. Der Schiefkörper SK enthält einen Ring, der zum Ring $\mathfrak{R}_D$ der linearen ifferentialoperatoren

$$a_0(s)\, D^n + a_1(s)\, D^{n-1} + \cdots + a_n(s)$$

it analytischen $a_i(s)$ isomorph ist. Jedoch stellt SK nicht die minimale rweiterung von $\mathfrak{R}_D$ zum Körper dar. Letztere läßt sich unter Zuhilfenahme es Einbettungssatzes von O. ORE als Quotientenkörper über $\mathfrak{R}_D$ konstruieren. er Zusammenhang zwischen diesen beiden Möglichkeiten der Einbettung ird in einer folgenden Arbeit erörtert.

Literatur

ERG, E. J.: Rechnung mit Operatoren nach OLIVER HEAVISIDE. München u. Berlin 1932.

ROMWICH, T. J. I. A.: Normal coordinates in dynamical systems. Proc. Lond. Math. Soc. **15**, 401 (1916).

ARSON, J. R.: Electric circuit theory and the operational calculus. Bell Technical J. **4**, 685 (1925); **5**, 50 (1926).

HURCHILL, R. V.: Operational Mathemasics. New York-Toronto-London 1958.

DOETSCH, G.: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Annalen 192 (1923).
— Die Anwendung der Funktionaltransformation in der Theorie der Differentialgl chungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül). Jahresber. dtsch. Ma Vereinigung **43**, 238 (1934).
— Handbuch der Laplace-Transformation. Basel u. Stuttgart 1950—1956.
DROBOT, S., et J. G. MIKUSINSKI: Sur l'unicité des solutions de quelques équatio differentielles dans les espaces abstraits. Studia Mathematica **11**, 38—40 (195
HEAVISIDE, O.: Electromagnetic Theory. London 1899.
HUMBERT, P.: Formules nouvelles pour le calcul symbolique. Bull. Soc. Math. Fran **65**, 119 (1937).
KAMKE, E.: Differentialgleichungen I, 3. Aufl. Leipzig 1944.
KOPPENFELS, W. v.: Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linear Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann. **105**, 694 (1931
MIKUSINSKI, J. G.: Operatorenrechnung. Berlin 1957.
— Sur les fondements du calcul operatoire. Studia Mathematica **11**, 41—70 (1950
PICONE, M.: Nouvelles methodes du recherche pour la détermination des intégrales d équations linéaires aux dérivées partielles. Ann. du la Soc. Pol. de Math. **19**, 36—6 (1946).
VAHLEN, K. TH.: Über den Heaviside-Kalkül. Z. angew. Math. u. Mechanik **13**, 283 (1933
WAGNER, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. Leipzig 195

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. August 1960)

KÜNNETH, H.
Math. Zeitschr. 76, 199—208 (1961)

Zu einem Satz von Hjelmslev über monotone Bogen

Von
HERMANN KÜNNETH

In seiner grundlegenden Arbeit über monotone Folgen und Bogen bringt HJELMSLEV[1]) im *Theorem* 28 auch den wichtigen Satz: „Der Richtungskegel einer monotonen Kurve ist selbst monoton oder mindestens aus einer endlichen Zahl monotoner Teilbogen zusammengesetzt." Der Richtungskegel wird von den durch einen beliebigen Punkt 0 gehenden Parallelen zu den vorderen Halbtangenten gebildet. Das Theorem wird aus Sätzen über monotone Punktfolgen abgeleitet. Eine Punktfolge p_i $(i=1, 2, \ldots)$ im euklidischen R^n heißt *monoton*, wenn *jedes* n-dimensionale Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_n}$ $(i_0<i_1<\cdots<i_n)$ die gleiche Orientierung hat. Der Richtungskegel der Folge wird entsprechend wie oben erklärt, wobei an Stelle der Halbtangenten die von p_i ausgehenden Halbgeraden $p_i\, p_{i-1}$ treten. Nach Theorem 16 ist dieser Richtungskegel schließlich monoton, worauf sich der Beweis von Theorem 28 stützt. Theorem 16 ist aber nur für den R^3 bewiesen, und auf S. 58 heißt es nur „le théorèm 16 peut être facilement généralisé a l'espace R^n". Dazu müßte das Theorem 5 auf den R^n verallgemeinert werden, das für den R^2 aussagt, daß eine unendliche beschränkte Punktfolge p_i, die nicht schließlich in einer Geraden liegt, schließlich monoton ist, wenn 1. drei aufeinanderfolgende Punkte p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, falls sie nicht in einer Geraden liegen, immer die gleiche Orientierung haben, und 2. die Halbgeraden $p_{i-1}\, p_i$ eine Halbgerade zum Limes haben.

Zum Beweis des Theorems 28 ist daher nötig die Verallgemeinerung der Theoreme 5 und 16 auf den R^n, und hiezu benötigt man eine Verallgemeinerung auf den R^n von Theorem 4, nach dem die Halbgeraden $p_s p_r$ $(s>r)$ einer beschränkten monotonen Punktfolge im R^2 eine Halbgerade zum Limes haben. Dies ist in Theorem 22 nur geschehen für den Fall der Hyperebenen $(p_{i_1}, p_{i_2} \ldots p_{i_n})$[2]) $(i_1<i_2<\cdots<i_n)$. Im übrigen heißt es nur (S. 57): „On peut définir d'une manière analogue le demi-espaoe osculateur et on peut aller plus loin en considérant l'espace osculateur R^p à un nombre quelconque p de dimensions, $p<n$."

Hier sollen nun die Lücken im Beweis des wichtigen Theorems 28 ausgefüllt und dazu die Verallgemeinerungen der Theoreme 5, 16 und 22 gebracht werden.

[1]) „Introduction à la théorie des suites monotones." Overs. ov. d. kong. Danske Vidensk. selskabs Forhandlinger. S. 3—74. (1914).

[2]) Mit $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu)$ werde der kleinste lineare Unterraum von R^n bezeichnet, der die linearen Unterräume $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ enthält, mit $[Q_1; q)$ der von Q_1 begrenzte abgeschlossene Halbraum, der den Punkt q enthält, mit $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_r}$ das r-dimensionale orientierte Simplex (r-Simplex), das durch die Eckpunkte $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}$ in dieser Reihenfolge bestimmt wird. Ein r-dimensionaler linearer Unterraum von R^n $(0\leqq r\leqq n-1)$ werde als r-Ebene bezeichnet, eine $(n-1)$-Ebene auch als Hyperebene.

1. $p_1, p_2, p_3 \ldots$ sei eine unendliche Punktfolge F im euklidischen R^n. Il von $r+1$ linear unabhängigen Punkte $p_{i_1}, p_{i_2} \ldots p_{i_{r+1}}$ ausgespannten r-Ebem heißen *r-Sekanten* der Folge F $(0 \leqq r < n)$, und *r-Schmieg-Sekanten*, wenn ϱ $r+1$ Punkte p_{i_ϱ} aufeinanderfolgende Punkte der Folge sind, also $i_{\varrho+1} = i_\varrho +$ Die r-Schmieg-Sekanten werden bezeichnet mit $S_i^r = (p_i, p_{i+1} \ldots p_{i+r})$, $i \geqq$ $0 \leqq r \leqq n$; $S_i^0 = p_i$, $S_i^n = R^n$.

Das r-Simplex $p_i p_{i+1} \ldots p_{i+r}$ werde mit $\mathfrak{S}_i^r$ bezeichnet.

2. Allen r-Sekanten der Folge $(1 \leqq r \leqq n-1)$ sei eine Orientierung be gelegt. Dadurch zerfallen die in ihnen liegenden r-Simplexe in zwei Äqu valenzklassen, die Klasse der positiven und der negativen r-Simplexe. *D Klasseneinteilung sei so getroffen, daß das r-Simplex* $p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_{r+1}}$ *in* $(p_{i_1}, p$ $\ldots, p_{i_{r+1}})$ *der positiven Klasse angehört.*

3. HJELMSLEV hatte bewiesen (a.a.O., Theorem 21), daß die Zentra projektion einer beschränkten monotonen Punktfolge aus einem beliebige Punkt q des R^n in eine Hyperebene H^{n-1} eine schließlich monotone Punktfolg in H^{n-1} ist.

Eine Verallgemeinerung davon liefert den

SATZ 1. *Die Projektion einer beschränkten monotonen Punktfolge aus eine k-Ebene* R^k $(0 \leqq k \leqq n-2)$ *in eine zu* R^k *fremde* $(n-k-1)$*-Ebene* H^{n-k-1} *i (falls beschränkt) eine schließlich monotone Punktfolge (in* H^{n-k-1}*).*

BEWEIS. Der Satz ist für $k=0$ von HJELMSLEV bewiesen. Wir nehmen an, e sei richtig für $k < k_0 \leqq n-2$. Die Punktfolge F werde aus der k_0-Ebene R^{k_0} in d dazu fremde $(n-k_0-1)$-Ebene H^{n-k_0-1} projiziert. Die Projektion von F sei F

Es sei R^{k_0-1} irgend eine in R^{k_0} enthaltene (k_0-1)-Ebene und q ein Punk in R^{k_0}, $q \notin R^{k_0-1}$, also $R^{k_0} = (R^{k_0-1}, q)$; ferner sei $H^{n-k_0} = (H^{n-k_0-1}, q)$.

F' kann man dann auch erhalten, indem man zunächst F aus R^{k_0-1} i H^{n-k_0} projiziert, die Projektion ist nach Induktionsannahme eine schließlic monotone Punktfolge F'', diese projiziert man nun aus q in H^{n-k_0-1}, wa wieder eine schließlich monotone Punktfolge ergibt.

4. Die Verallgemeinerung von Theorem 22 erhält man nun so: Jede be schränkte monotone Punktfolge hat einen eindeutig bestimmten Limespunkt (HJELMSLEV, a.a.O., S. 41). Gäbe es nun zwei Folgen gegen p konvergierende $(k+1)$-tupel $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ und $p_{i'_0}, p_{i'_1}, \ldots, p_{i'_k}$, so daß die orientierte k-Ebenen $(p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$ bzw. $(p_{i'_0}, p_{i'_1}, \ldots, p_{i'_k})$ eine orientierte k-Ebene bzw. α' zum Limes haben $(1 \leqq k \leqq n-1)$, wobei α und α' verschiedene k-Ebene sind oder dieselbe k-Ebene, aber mit verschiedener Orientierung, so ließe sic immer eine zu α und α' fremde $(n-k-1)$-Ebene R^{n-k-1} finden und $n-$ unabhängige Punkte $q_1, q_2 \ldots q_{n-k}$ in R^{n-k-1}, so daß die n-Simplexe $q_1 q_2 \ldots q_n$ $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ und $q_1 q_2 \ldots q_{n-k} p_{i'_0} p_{i'_1} \ldots p_{i'_k}$ verschieden orientiert sind und dah die Projektion von F aus R^{n-k-1} in eine dazu fremde k-Ebene nicht schließlic monoton ist, in Widerspruch zu Satz 1.

Alle k-Sekanten einer beschränkten monotonen Punktfolge haben daher ei eindeutig bestimmte orientierte k-Ebene zum Limes.

5. Die Verallgemeinerung von Theorem 5 lautet nun so:

SATZ 2. *Eine unendliche Punktfolge $F=p_1, p_2 \ldots$ im R^n ist schließlich monoton, wenn sie folgende Forderungen erfüllt:*

FORDERUNG 1. *$n+1$ aufeinanderfolgende Punkte sind linear unabhängig und die von ihnen ausgespannten n-Simplexe haben alle dieselbe Orientierung.*

FORDERUNG 2. *Alle orientierten k-Schmieg-Sekanten $(0 \leqq k \leqq n-1)$ haben eine orientierte k-Ebene zum Limes.*

Mit Forderung 2 ist gleichbedeutend

FORDERUNG 2'. *Alle Halb-k-Ebenen $[S_i^{k-1}; p_{i+k})$ haben eine Halb-k-Ebene zum Limes* $(1 \leqq k \leqq n-1)$.

Aus Forderung 1 und 2 folgt, daß auch die Halbräume $[S_i^{n-1}; p_{i+n})$ einen Halbraum von R^n zum Limes haben[3]).

Von den beiden Halb-k-Ebenen, in die S_i^k durch S_i^{k-1} $(1 \leqq k \leqq n)$ geteilt wird, werde $[S_i^{k-1}; p_{i-k})$ als die „*positive*" Halb-k-Ebene bezeichnet und alle in $[S_i^{k-1}; p_{i-k})$ liegenden Punkte als „*oberhalb*" S_i^{k-1} in S_i^k gelegen.

Nach Forderung 2 existiert $\lim\limits_{i\to\infty} S_i^k = E^k$, wobei E^k eine orientierte k-Ebene ist $(0 \leqq k \leqq n-1)$, $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = E^0 = p$.

Es gibt also ein i_0 und ein $\varepsilon > 0$, so daß alle p_i mit $i > i_0$ in einer konvexen ε-Umgebung $V(p)$ von p liegen. Die Punktfolge F ist daher beschränkt.

Es sei $E_+^k = \lim\limits_{i\to\infty} [S_i^{k-1}; p_{i+k})$ $(1 \leqq k \leqq n)$.

Als eine zu F zugehörige „*Inzidenzkette*" (IK) von k-Ebenen $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ werde jede Folge $U^0 < U^1 < U^2 \ldots < U^{n-1}$ bezeichnet, für die folgendes gilt:

Für alle $i > i_0$ ist 1. $U^k \cap S_i^{n-k-1} = \emptyset$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$, 2. $U^0 \in [S_i^{n-1}; p_{i+n})$; $U^1 \cap S_i^{n-1} = x_i^{n-1} \in [S_i^{n-2}; p_{i+n-1})$; $U^1 \cap E^{n-1} = e^{n-1} \in E_+^{n-1}$; $U^k \cap S_i^{n-k} = x_i^{n-k} \in [S_i^{n-k-1}; p_{i+n-k})$; $U^k \cap E^{n-k} = e^{n-k} \in E_+^{n-k}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$, 3. Es gibt eine zu U^{k-1} fremde konvexe Umgebung $V(e^{n-k})$ von e^{n-k} in U^k, so daß $x_i^{n-k} \in V(e^{n-k})$.

Die an die Inzidenzkette U^k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ gestellten Forderungen können gemäß der Forderung 2' des Satzes 2 erfüllt werden.

Für die weiteren Betrachtungen sei immer $i > i_0$ angenommen.

Projiziert man die k-Simplexe $(1 \leqq k \leqq n-1)$ einer Äquivalenzklasse von S_i^k aus U^{n-k-1} in S_j^k oder E^k, so gehören die Projektionen der k-Simplexe auch alle derselben Äquivalenzklasse in S_j^k bzw. E^k an. Das folgt aus der durch die Projektion erzeugten eineindeutigen stetigen Abbildung und daraus, daß Simplexe derselben Äquivalenzklasse und nur solche stetig ineinander übergeführt werden können. So läßt sich durch die Projektion aus U^{n-k-1} die Orientierung von S_i^k auf S_j^k bzw. E^k übertragen.

---

[3]) HJELMSLEV verlangt in Theorem 5 bis, bzw. 17 und 23 nur, daß die Punktfolge nicht schließlich in einer Hyperebene liegt und daß $[S_i^{n-1}; p_{i+n})$ für $i \to \infty$ einen Halbraum zum Limes hat. Das genügt aber nicht, wie das einfache Gegenbeispiel der Punktfolge $p_i\left(x = \frac{(-1)^i}{i};\ y = \frac{1}{i}\right)$ für den R^2 beweist. In R^3 genügt die Punktfolge $p_i\left(x = \frac{1}{i}\cos\frac{2\pi i}{3};\ y = \frac{1}{i}\sin\frac{2\pi i}{3};\ z = \frac{1}{i}\right)$ außerdem sogar noch der Forderung 1 ohne schließlich monoton zu sein.

Mit Forderung 2 ist daher auch gleichbedeutend

FORDERUNG 2''. *Die Projektionen der k-Simplexe* $\mathfrak{S}_i^k$ $(i=i_0, i_0+1, \ldots)$ *auf* U^{n-k-1} *in* S_j^k *oder* E^k *gehören alle derselben (nämlich der positiven) Äquivalenzklasse in* S_j^k *bzw.* E^k *an* $(1 \leqq k \leqq n-1)$.

6. Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir einiger Hilfssätze.

HILFSSATZ 1. *Projiziert man die Punkte einer Punktfolge F, die den Forderungen 1 und 2 des Satzes 2 genügt, aus* U^{n-r-1} *in* S_i^r, *so erhält man eine Punktfolge F'; die ebenfalls den Forderungen 1 und 2 genügt, wobei n durch r zu ersetzen ist und* U^ϱ *durch* $S_i^r \cap U^\varrho = U'^{r+\varrho-n}$ $(n-r \leqq \varrho \leqq n-1)$.

BEWEIS. 1. Da für F Forderung 2'' erfüllt ist, sind alle Projektionen des r-Simplexe $\mathfrak{S}_j^r$ $(j > i_0)$ aus U^{n-r-1} in S_i^r positive r-Simplexe in S_i^r; daraus folgt, daß Forderung 1 für die Folge F' erfüllt ist.

2. Da $S_j^\varrho \cap U^{n-r-1} = \emptyset$ für $\varrho \leqq r$, ist $(U^{n-r-1}, S_j^\varrho) \cap S_i^r = T_j^\varrho$ eine ϱ-Schmieg-Sekante von F' und, da $\lim_{j\to\infty} T_j^\varrho = \lim_{j\to\infty} (U^{n-r-1}, S_j^\varrho) \cap S_i^r = (U^{n-r-1}, E^\varrho) \cap S_i^r$ haben alle ϱ-Schmieg-Sekanten von F' $(0 \leqq \varrho < r)$ einen Limes. Es ist noch zu zeigen, daß sie eine orientierte ϱ-Ebene zum Limes haben.

3. $x' = (U^{n-r-1}, x) \cap S_i^r$ sei die Projektion eines Punktes x aus U^{n-r-1} in S_i^r; $x'' = (U'^{r-\sigma-1}, x') \cap T_j^\sigma$ sei die Projektion des Punktes x' aus $U'^{r-\sigma-1}$ in T_j^σ $(1 \leqq \sigma \leqq r-1)$.

Es ist $\dim(S_i^r \cap U^{n-\sigma-1}) = r-\sigma-1$ und $\dim\big((S_i^r \cap U^{n-\sigma-1}), U^{n-r-1}\big) = n-\sigma-1$, da $S_i^r \cap U^{n-r-1} = \emptyset$; also, da $U^{n-r-1} < U^{n-\sigma-1}$, $x'' = \big((S_i^r \cap U^{n-\sigma-1}), U^{n-r-1}, x\big) \cap T_j^\sigma = (U^{n-\sigma-1}, x) \cap T_j^\sigma$, d.h. x'' ist die Projektion von x aus $U^{n-\sigma-1}$ in T_j^σ. Man erhält daher die gleichen σ-Simplexe, ob man die σ-Simplexe $\mathfrak{S}_j^\sigma$ $(0 \leqq \sigma \leqq r-1)$ aus $U^{n-\sigma-1}$ in T_j^σ projiziert oder erst aus U^{n-r-1} in S_i^r und dann aus $U'^{r-\sigma-1}$ in T_j^σ.

Daher gehören die Projektionen der σ-Simplexe $\mathfrak{S}_j^\sigma$ $(0 \leqq \sigma \leqq r-1)$ aus $U^{n-\sigma-1}$ in das orientierte T_j^σ alle der gleichen (positiven) Klasse an; dasselbe gilt auch, wenn man S_j^σ durch E^σ, also T_j^σ durch $(U^{n-r-1}, E^\sigma) \cap S_i^r$ ersetzt. So ist auch Forderung 2'' (und damit 2) für F' erfüllt.

7. HILFSSATZ 2. *Wenn für eine Punktfolge* F: $p_1, p_2 \ldots$ *die Forderungen des Satzes 2 erfüllt sind, so gibt es ein* i_0, *so daß* p_k *oberhalb* S_i^{n-1} *liegt für* $k \geqq i+n$ *und* $i > i_0$ $(n \geqq 1)$.

Genauer wird folgendes behauptet: a) Für $i > i_0$, $k \geqq i+n$ und beliebiges IK bezüglich F liegt p_{i+n} in dem n-Simplex Q_i, das begrenzt wird von den $(n-1)$-Ebenen (U^{n-2}, S_{i+n-1}^0), (U^{n-2}, p_{i+n-1}), $(U^{n-3}, S_{i+n-2}^1) \ldots (U^0, S_{i+1}^{n-2})$ von U^{n-1} und S_i^{n-1}, oder wenn U^{-1} und S^{-1} die leere Menge bedeutet, von den $(n-1)$-Ebenen $(U^{n-r-1}, S_{i+n-r}^{r-1})$ $(0 \leqq r \leqq n)$.

b) Es ist $Q_{i'} < Q_i$ für $i' > i$.

BEWEIS. Der Hilfssatz ist richtig für $n=1$. Wir nehmen an, er sei richtig für den R^{n-1}, und beweisen ihn für den R^n.

Man projiziert F aus U^0 in S_i^{n-1}. p'_ν sei die Projektion von p_ν $(\nu = i, i+1 \ldots)$. Dann bilden gemäß Hilfssatz 1 die Punkte $p'_i = p_i$, $p'_{i+1} = p_{i+1} \ldots p'_{i+n-1} =$

$_{i+n-1}$, p'_{i+n}, ..., p'_k ... eine Punktfolge F', die Forderung 1 und 2 von Satz 2 erfüllt. $U^\varrho \cap S_i^{n-1}$ $(1 \leqq \varrho \leqq n-1)$ bildet eine IK für F'. Die Ecken von Q_i sind: $S^\varrho_{i+n-\varrho-1} \cap U^{n-\varrho}$ $(0 \leqq \varrho \leqq n) = x^\varrho_{i+n-\varrho-1}$. Denn es ist $S^\varrho_{i+n-\varrho-1} \cap U^{n-\varrho}$ enthalten in $(S^{r-1}_{i+n-r}, U^{n-r-1})$ für $r < \varrho$, da $U^{n-\varrho} \subset U^{n-r-1}$, und für $r > \varrho$, da $S^\varrho_{i+n-\varrho-1} \subset S^{r-1}_{i+n-r}$. Dagegen ist $S^r_{i+n-r-1} \cap U^{n-r} \not\subset (S^{r-1}_{i+n-r}, U^{n-r-1})$, da $S^r_{i+n-r-1} \cap U^{n-r-1} = 0$ und $U^{n-r} \cap S^{r-1}_{i+n-r} = 0$. Die Ecke $x^r_{i+n-r-1}$ liegt aber der in $(S^{r-1}_{i+n-r}, U^{n-r-1})$ liegenden Seite von Q_i gegenüber.

a) Da nach Induktionsannahme Hilfssatz 2 für F' in S_i^{n-1} anwendbar ist, liegt p'_{i+n} in demjenigen $(n-1)$-Simplex Q'_{i-1} in S_i^{n-1}, das begrenzt wird von den $(n-2)$-Ebenen $\left((U^{n-r-1} \cap S_i^{n-1}), S^{r-1}_{i+n-r}\right)$ $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ mit den Ecken $x^\varrho_{i+n-\varrho-1}$ $(0 \leqq \varrho \leqq n-1)$. Q'_{i-1} hat also als Seiten die Durchschnitte von S_i^{n-1} mit den übrigen Seiten von Q_i und ist eines der $(n-1)$-dimensionalen Randsimplexe von Q_i, also $Q'_{i-1} = Q_i \cap S_i^{n-1}$. p_{i+n} liegt zwischen U^0 und p'_{i+n}, also in Q_i.

b) Q_{i-1} wird begrenzt von den $(n-1)$-Ebenen $(U^{n-r-1}, S^{r-1}_{i+n-r-1})$ $(0 \leqq r \leqq n)$. $\overline{Q}_{i-1}$ sei das n-Simplex, das begrenzt wird von den $(n-1)$-Ebenen $(U^{n-r-1}, S^{r-1}_{i+n-r-1})$ $(0 \leqq r \leqq n-1)$ und von S_i^{n-1}. $\overline{Q}_{i-1}$ hat also dieselben Begrenzungshyperebenen wie Q_{i-1}, nur statt S^{n-1}_{i-1} die $(n-1)$-Schmieg-Sekante S_i^{n-1}.

Q'_{i-2} in S_i^{n-1} wird begrenzt von den Durchschnitten der Hyperebenen $(U^{n-r-1}, S^{r-1}_{i+n-r+1})$ $(0 \leqq r \leqq n-1)$ mit S_i^{n-1}, da alle diese Hyperebenen durch das Projektionszentrum U^0 gehen.

Q'_{i-2} ist die in S_i^{n-1} liegende Seite von $\overline{Q}_{i-1}$ und es ist nach Induktionsannahme $Q'_{i+2} \subset Q'_{i+1}$, also auch $\overline{Q}_{i+1} \subset Q_i$.

S_i^{n-1}, S^{n-1}_{i-1}, (S^{n-2}_{i-1}, U^0) gehören demselben Hyperebenenbüschel mit der Achse S^{n-2}_{i-1} an. S_i^{n-1} und (S^{n-2}_{i-1}, U^0) sind Begrenzungshyperebenen von Q_i. Da p_{i-n} in Q_i liegt, so ist $S^{n-1}_{i-1} \cap U^1 = x^n_{i+1}$ auf U^1 zwischen $S_i^{n-1} \cap U^1 = x_i^{n-1}$ und U^0. Weiter folgt daraus, daß $Q_{i+1} \subset Q_i$.

Aus $Q_{i+1} \subset Q_i$ und $p_{i+n} \in Q_i$ erhält man: $Q_i \subset Q_{i+1} \subset Q_{i+2} \subset \cdots$ und $p_{\nu+n}$ $(\nu \geqq i) \in Q_\nu$, woraus folgt: $p_k \in Q_i$ $(k \geqq i+n)$.

Zusatz. Außerdem hat sich aus dem Beweis ergeben, daß auf U^1 die Punkte x_i^{n-1}, x^{n-1}_{i+1}, x^{n-1}_{i-2} ... U^0 in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgen.

8. *r-Sekanten-Hüllen* von F $(0 \leqq r \leqq n-1)$. Die 0-Sekanten-Hülle $H(p_{i_1}, p_{i_2} \ldots p_{i_r})$ der endlich vielen Punkte $p_{i_1}, p_{i_2} \ldots p_{i_r}$ von F bezüglich einer IK, auch als *Punkthülle* bezeichnet, ist gleich der konvexen Hülle dieser Punkte im R^n. Sie ist enthalten in $V(E^0)$ (5)[4] $H(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r}) \subset (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_r})$.

Sind $S^1_{i_1}, S^1_{i_2} \ldots S^1_{i_r}$ irgend welche 1-Schmieg-Sekanten von F und ist $S^1_{i_\varrho} \cap U^{n-1} = x^1_{i_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$, ist ferner $H(x^1_{i_1}, x^1_{i_2} \ldots x^1_{i_r})$ die Punkthülle der $x^1_{i_\varrho}$ in $V(e^1)$ (5) und $H(p_{j_1}, p_{j_2} \ldots p_{j_s})$ die Punkthülle der mit den $S^1_{i_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ inzidenten Punkte p_{j_σ} von F $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$, so sei unter der *1-Sekanten-Hülle* $H(S^1_{i_1}, S^1_{i_2} \ldots S^1_{i_r})$ der $S^1_{i_1}, S^1_{i_2} \ldots S^1_{i_r}$ bezüglich der IK verstanden: die Menge der *Geraden*, welche Punkte von $H(x^1_{i_1}, x^1_{i_2} \ldots x^1_{i_r})$ mit Punkten von $H(p_{j_1}, p_{j_2} \ldots p_{j_s})$ verbinden.

[4]) Zahlen in Klammern verweisen auf die betreffenden Abschnitte dieser Arbeit.

Ist die k-Sekanten-Hülle bezüglich der IK von k-Schmieg-Sekanten aus F für alle $k<k_0$ erklärt, und sind $S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r}$ irgend welche k_0-Schmieg-Sekanten von F, ist ferner $S^{k_0}_{i_\varrho} \cap U^{n-k_0} = x^{k_0}_{i_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \dots, r)$. $H(x^{k_0}_{i_1}, x^{k_0}_{i_2} \dots x^{k_0}_{i_r})$ die Punkthülle der $x^{k_0}_{i_\varrho}$ in $V(e^{k_0})$ und $H(S^{k_0-1}_{j_1}, S^{k_0-1}_{j_2} \dots S^{k_0-1}_{j_s})$ die (k_0-1)-Sekanten-Hülle bezüglich der IK der mit den $S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r}$ inzidenten (k_0-1)-Schmieg-Sekanten von F, so wird unter der *k_0-Sekanten-Hülle* $H(S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r})$ bezüglich der IK der $S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r}$ verstanden: die Menge der k_0-Ebenen, die Punkte von $H(x^{k_0}_{i_1}, x^{k_0}_{i_2} \dots x^{k_0}_{i_r})$ mit (k_0-1)-Ebenen von $H(S^{k_0-1}_{j_1}, S^{k_0-1}_{j_2} \dots S^{k_0-1}_{j_s})$ verbinden.

Gleichbedeutend mit dieser Definition von $H(S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r})$ ist folgende: Sind $S^u_{j_\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \dots, l_u)$ die mit den $S^k_{i_\varrho}$ $(\varrho = 1, 2, \dots, r)$ inzidenten u-Schmieg-Sekanten $(0 \leqq u \leqq k_0 - 1)$ und ist $S^u_{j_\lambda} \cap U^{n-u} = x^u_{j_\lambda}$, so besteht $H(S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_r})$ aus allen k_0-Ebenen, die einen Punkt von $H(S^0_{j_1}, S^0_{j_2}, \dots, S^0_{j_{l_0}})$ mit je einem Punkt aus $H(x^u_{j_1}, x^u_{j_2} \dots x^u_{j_{l_u}})$ verbinden $(1 \leqq u \leqq k_0)$.

Jede k-Ebene $\tilde{L}^k$ einer k-Sekanten-Hülle $(0 \leqq k \leqq n-1)$ bezüglich einer IK von k-Schmieg-Sekanten $S^k_{i_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, s)$ von F ist fremd zu U^{n-k-1}.

Dies ist richtig für $k=0$. Wir nehmen an, es sei richtig für $k=k_0-1$, und beweisen indirekt die Richtigkeit für $k=k_0$. $q \in U^{n-k_0-1}$ gehöre einer k_0-Ebene L^{k_0} von $H(S^{k_0}_{i_1}, S^{k_0}_{i_2} \dots S^{k_0}_{i_s})$ an, die also einen Punkt von $H(x^{k_0}_{i_1}, x^{k_0}_{i_2} \dots x^{k_0}_{i_s})$ mit einer (k_0-1)-Ebene L^{k_0-1} von $H(S^{k_0-1}_{j_1}, S^{k_0-1}_{j_2} \dots S^{k_0-1}_{j_t})$ verbindet, wobei die $S^{k_0-1}_{j_\tau}$ $(\tau = 1, 2, \dots, t)$ die mit den $S^{k_0}_{i_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, s)$ inzidenten (k_0-1)-Schmieg-Sekanten sind. Da $H(x^{k_0}_{i_1}, x^{k_0}_{i_2} \dots x^{k_0}_{i_s}) < V(e^{k_0})$ und $V(e^{k_0}) \cap U^{n-k_0-1} = \emptyset$ und $q \in \tilde{L}^{k_0} \cap U^{n-k_0-1}$, würde U^{n-k_0} von dieser Ebene $\tilde{L}^{k_0}$ mindestens in einer Geraden geschnitten werden, und es wäre $\tilde{L}^{k_0-1} \cap U^{n-k_0}$ nicht leer, im Widerspruch mit der Induktionsannahme

Ist L^r eine r-Ebene, die einer r-Sekanten-Hülle $H(S^r_{i_1} \dots S^r_{i_s})$ von F bezüglich einer IK angehört, so heiße L^r bezüglich U^{n-r-1} gleich orientiert wie die r-Schmieg-Sekanten $S^r_{i_1} \dots S^r_{i_s}$, wenn die Projektion eines positiven r-Simplexes von $S^r_{i_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, s)$ aus U^{n-r-1} in L^r ein positives r-Simplex in L^r ist. Dies gilt dann für alle positiven r-Simplexe in $S^r_{i_\sigma}$, deren Projektionen r-Simplexe sind und für alle σ (s. 5, vorletzter Absatz).

9. HILFSSATZ 3. VORAUSSETZUNG. $F = p_1, p_2 \dots$ sei eine unendliche Punktfolge, die den Forderungen 1 und 2 des Satzes 2 genügt. Es sei $S^{r-1}_{i,\varrho} = (p_i \dots p_{i+\varrho-1}, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r})$ $(2 \leqq r \leqq n;\ 1 \leqq \varrho \leqq r-1)$, also $S^{r-1}_{i+\nu,\varrho-\nu} = (p_{i+\nu}, p_{i+\nu+1} \dots p_{i+\varrho-1}, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+\nu+r})$ $(1 \leqq \nu \leqq r-2;\ \nu < \varrho \leqq r-1)$.

BEHAUPTUNG. 1. *$S^{r-1}_{i,\varrho}$ gehört der $(r-1)$-Sekanten-Hülle $H(S^{r-1}_i\ S^{r-1}_{i+1})$ von S^{r-1}_i und S^{r-1}_{i+1} bezüglich jeder F zugeordneten IK an.*

2. *Das r-Simplex $\mathfrak{S}^r_{i,\varrho} = p_i \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r+1}$ $(1 \leqq \varrho \leqq r;\ 1 \leqq r \leqq n)$ hat dieselbe Orientierung bezüglich U^{n-r-1} wie die r-Simplexe $\mathfrak{S}^r_i = p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+r}$ und $\mathfrak{S}^r_{i+1} = p_{i+1}\, p_{i+2} \dots p_{i+r+1}$, ihre Projektionen aus U^{n-r-1} in S^r_i, S^r_{i+1} oder E^r gehören also derselben Klasse an.*

3. *Die Punktfolge $F_\varrho = p_1 \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots$ erfüllt die Forderungen 1 und 2 des Satzes 2.*

Vorbemerkung. Behauptung 3. folgt aus 1. und 2.

Denn, daß die Forderung 1 erfüllt ist für F_ϱ, folgt direkt aus 2.; ferner haben die r-Schmieg-Sekanten von F_ϱ auch E^r zum Limes, da $S^r_{i,\varrho} \cap U^{n-r} \subset V(e^r)$ wegen $S^r_{i,\varrho} \in H(S^r_i, S^r_{i+1})$ gemäß Behauptung 1., und gemäß Behauptung 2. haben sie das orientierte E^r zum Limes.

9.1. Wir beweisen zuerst die Richtigkeit des Hilfssatzes für $r=2$ $(n \geqq 2)$.

9.1.1. *Betreff Behauptung* 1. Hier ist $\varrho=1$ und $S^r_{i,1}=(p_i, p_{i+2})$.

Es sei $S^\lambda_i \cap U^{n-1} = X^1_i$. Da $x^2_i = S^2_i \cap U^{n-2}$, ist $x^2_i \in X^1_i$; da $x^1_i = S^1_i \cap U^{n-1}$, $x^1_{i+1} = S^1_{i+1} \cap U^{n-1}$, ist $x^1_i \in X^1_i$, $x^1_{i+1} \in X^1_i$. Da $x^1_i \in [p_i; p_{i+1})$ und $x^1_{i+1} \in [p_{i+1}; p_{i+2})$, liegt p_{i+1} zwischen p_i und x^1_i, p_{i+2} zwischen p_{i+1} und x^1_{i+1}.

Ferner sei $x^1_{i,1} = S^1_{i,1} \cap X^1_i$.

Von den drei Seiten des Dreiecks $p_{i-1}\, x^1_i\, x^1_{i-1}$ wird daher von $S^1_{i,1}$ die Seite $p_{i-1}\, x^1_{i+1}$ in p_{i-2}, aber nicht die Seite $p_{i+1}\, x^1_i$ geschnitten, also muß nach dem Axiom von Pasch auch die Seite $x^1_i\, x^1_{i+1}$ geschnitten werden. $x^1_{i,1}$ liegt daher zwischen x^1_i und x^1_{i+1}.

Die Gerade $S^1_{i,1}$ gehört daher der 1-Sekanten-Hülle $H(S^1_i, S^1_{i+1})$ bezüglich der IK an. Auf X^1_i folgen die Punkte x^1_i, $x^1_{i,1}$, x^1_{i+1} in dieser Reihenfolge aufeinander.

9.1.2. *Betreff Behauptung* 2. (für $r=2$). Ist p'_j die Projektion von p_j aus U^{n-3} in S^2_i, so erfüllt die Punktfolge $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p'_{i+3} \ldots$ nach Hilfssatz 1 die Forderungen 1 und 2 des Satzes 2, und nach Hilfssatz 2 liegt p'_{i+3} oberhalb S^1_i in S^2_i. Das 2-Simplex $p_i\, p_{i-1}\, p'_{i+3}$ hat daher die gleiche Orientierung wie das 2-Simplex $p_i\, p_{i+1}\, p_{i+2}$; damit ist Behauptung 2 für $\varrho=2$ bewiesen.

Für $\varrho=1$ beweist man so: p'_{i+3} liegt oberhalb S^1_{i+1} in S^2_i. Es sei $S^{1\prime}_{i+2} = (p_{i+2}, p'_{i+3})$ und $S^{1\prime}_{i+2} \cap X^1_i = x^1_{i+2}$, $S^{1\prime}_{i+1,1} = (p_{i+1}, p'_{i+3})$ und $S^{1\prime}_{i+1,1} \cap X^1_i = x^1_{i+1,1}$. Wie beim Beweis der Behauptung 1 ergibt sich, daß $x^1_{i+1,1}$ zwischen x^1_{i+1} und x^1_{i+2}, p'_{i+3} zwischen p_{i+2} und x^1_{i+2} liegt.

Aus 7. Zusatz, folgt, wenn man R^n, U^1, U^0 für $n=2$ ersetzt durch S^2_i, X^1_i, x^2_i, daß auf X^1_i die Punkte x^1_i, x^1_{i+1}, x^1_{i+2}, x^2_i in dieser Reihenfolge liegen, zusammen mit dem oben Bewiesenen erhält man auf X^1_i die Reihenfolge x^1_i, $x^1_{i,1}$, x^1_{i+1}, $x^1_{i+1,1}$, x^1_{i+2}, x^2_i.

Es ist das 2-Simplex $p_i\, p_{i+2}\, p_{i+1}$ und daher auch $p_i\, p_{i+2}\, x^1_i$ negativ, also $p_i\, p_{i+2}\, x^1_{i+2}$ und $p_i\, p_{i+2}\, p'_{i+3}$ positiv, w. z. z. w.

9.2. Wir nehmen Hilfssatz 3 als richtig an für $r=r_0-1 \geqq 2$ und beweisen ihn für $r=r_0>2$.

9.2.1. *Betreff Behauptung* 1. Es sei $Z^1_i = S^{r_0}_i \cap U^{n-r_0+1}$; $x^{r_0}_i \in Z^1_i$. $x^{r_0-1}_i, x^{r_0-1}_{i+1} \in Z^1_i$. Da $x^{r_0-1}_i \in [S^{r_0-2}_i; p_{i+r_0-1})$ und $x^{r_0-1}_{i+1} \in [S^{r_0-2}_{i+1}; p_{i+r_0})$, ist $p_i\, p_{i+1} \ldots p_{i+r_0-2}\, x^{r_0-1}_i$ bzw. $p_{i+1}\, p_{i+2} \ldots p_{i+r_0-1}\, x^{r_0-1}_{i+1}$ ein positives (r_0-1)-Simplex in $S^{r_0-1}_i$ bzw. in $S^{r_0-1}_{i+1}$.

Das (r_0-1)-Simplex $p_i \ldots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \ldots p_{i+r_0-1}\, p_{i+\varrho}$ $(1 \leqq \varrho \leqq r_0-2)$ in $S^{r_0-1}_i$ ist positiv bzw. negativ, wenn $r_0-\varrho$ ungerade bzw. gerade ist. Da $S^{r_0-2}_{i,\varrho}$ nach Induktionsannahme der (r_0-2)-Sekanten-Hülle $H(S^{r_0-2}_i, S^{r_0-2}_{i+1})$ bezüglich der IK angehört und bezüglich $x^{r_0-1}_i = U^{n-r_0+1} \cap S^{r_0-1}_i$ gleich orientiert ist wie $S^{r_0-2}_i$, das (r_0-1)-Simplex $p_i \ldots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \ldots p_{i+r_0-1}\, x^{r_0-1}_i$ also

positiv ist, *liegt* $p_{i+\varrho}$ *in* $S_i^{r_0-1}$ *auf der gleichen Seite von* $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$ *wie* $x_i^{r_0-1}$ *bzw. auf entgegengesetzter Seite, wenn* $r_0-\varrho$ *ungerade bzw. gerade ist.* Das gilt auch noch für $\varrho=r_0-1$, denn dann liegt $p_{i+\varrho}=p_{i+r_0-1}$ auf derselben Seite von $S_i^{r_0-1}$ wie $x_i^{r_0-1}$ in $S_i^{r_0-1}$ gemäß Festsetzung von $x_i^{r_0-1}$.

Entsprechend erhält man für $S_{i+1}^{r_0-1}$ und $x_{i+1}^{r_0-1}$: $p_{i+\varrho}$ $(1<\varrho\leqq r_0-1)$ *liegt auf der gleichen Seite von* $S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}$ *wie* $x_{i+1}^{r_0-1}$ *in* $S_{i+1}^{r_0-1}$ *bzw. auf der entgegengesetzten Seite, wenn* $r_0-\varrho$ *gerade bzw. ungerade ist.* Dies gilt auch für $\varrho=1$, denn dann liegt $p_{i+\varrho}=p_{i+1}$ auf derselben Seite von $S_{i+2}^{r_0-2}$ in $S_{i+1}^{r_0-1}$ wie $x_{i+1}^{r_0-1}$ bzw. auf entgegengesetzter, wenn $r_0-1=r_0-\varrho$ gerade bzw. ungerade ist.

Daraus folgt: *Liegen* $p_{i+\varrho}$ *und* $x_i^{r_0-1}$ *in* $S_i^{r_0-1}$ *auf der gleichen bzw. entgegengesetzten Seite von* $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$, *so liegen* $p_{i+\varrho}$ *und* $x_{i+1}^{r_0-1}$ *in* $S_{i+1}^{r_0-1}$ *auf der entgegengesetzten bzw. gleichen Seite von* $S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}$.

9.2.2. Die durch $x_i^{r_0-1}$, $x_{i+1}^{r_0-1}$ und $p_{i+\varrho}$ bestimmte 2-Ebene sei Z^2 $(1\leqq\varrho\leqq r_0-1)$. Es ist $Z^2\subset S_i^{r_0}$; $S_i^{r_0-1}$, $S_{i+1}^{r_0-1}$ und $S_{i,\varrho}^{r_0-1}$ werden daher von Z^2 in Geraden geschnitten, $S_i^{r_0-2}$, $S_{i+1}^{r_0-2}$, $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$, $S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}$ in Punkten, dabei ist $S_{i+1,0}^{r_0-2}=S_{i+2}^{r_0-2}$ und $S_{i,r_0-1}^{r_0-2}=S_i^{r_0-2}$.

Es sei $S_i^{r_0-1}\cap Z^2=(p_{i+\varrho},\ x_i^{r_0-1})=W_i^1$; $S_{i+1}^{r_0-1}\cap Z^2=(p_{i+\varrho},\ x_{i+1}^{r_0-1})=W_{i+1}^1$, $S_{i,\varrho}^{r_0-1}\cap Z^2=W_{i,\varrho}^1$; $W_i^1\cap W_{i+1}^1=p_{i+\varrho}$. $S_{i,\varrho}^{r_0-2}\cap Z^2=w_{i,\varrho}$; $S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}\cap Z^2=w_{i+1,\varrho-1}$. Es ist $w_{i,\varrho}=S_i^{r_0-1}\cap S_{i,\varrho}^{r_0-1}\cap Z^2=W_i^1\cap W_{i,\varrho}^1$ und $w_{i+1,\varrho-1}=W_{i+1}^1\cap W_{i,\varrho}^1$; $W_{i,\varrho}^1=(w_{i,\varrho},\ w_{i+1,\varrho-1})$.

Das Ergebnis von 9.2.1. angewendet auf die Schnittgeraden und Schnittpunkte in Z^2 ergibt:

Liegen $p_{i+\varrho}$ und $x_i^{r_0-1}$ in W_i^1 auf der gleichen bzw. entgegengesetzten Seite von $w_{i,\varrho}$, so liegen $p_{i+\varrho}$ und $x_{i+1}^{r_0-1}$ in W_{i+1}^1 auf der entgegengesetzten bzw. gleichen Seite von $w_{i+1,\varrho-1}$, oder anders ausgedrückt: Liegt $w_{i,\varrho}$ nicht zwischen bzw. zwischen $p_{i+\varrho}$ und $x_i^{r_0-1}$, so liegt $w_{i+1,\varrho-1}$ zwischen bzw. nicht zwischen $p_{i+\varrho}$ und $x_{i+1}^{r_0-1}$, das bedeutet: $W_{i,\varrho}^1=(w_{i,\varrho},\ w_{i+1,\varrho-1})$ schneidet eine und nur eine der beiden Seiten $x_i^{r_0-1}p_{i+\varrho}$ und $x_i^{r_0-1}p_{i+\varrho}$ des Dreiecks $x_i^{r_0-1}x_{i+1}^{r_0-1}p_{i+\varrho}$, also wird nach dem Axiom von PASCH die Seite $x_i^{r_0-1}x_{i+1}^{r_0-1}$ von $W_{i,\varrho}^1$ in einem Punkt $x_{i,\varrho}$ geschnitten. Es folgen auf Z_i^1 die Punkte $x_i^{r_0-1}$, $x_{i,\varrho}$, $x_{i+1}^{r_0-1}$ in dieser Reihenfolge aufeinander.

$S_{i,\varrho}^{r_0-1}=(S_{i,\varrho}^{r_0-2},\ x_{i,\varrho})$ gehört demnach der (r_0-1)-Sekanten-Hülle $H(S_i^{r_0-1},\ S_{i+1}^{r_0-1})$ bezüglich der IK an, da nach Induktionsannahme $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$ der (r_0-2)-Sekanten-Hülle $H(S_i^{r_0-2},\ S_{i+1}^{r_0-2})$ angehört.

9.2.3. *Betreff Behauptung 2 für* $r=r_0>2$.

Für $\varrho=r_0$ folgt die Richtigkeit aus Hilfssatz 2 und 1. Es sei nun $1\leqq\varrho\leqq r_0-1$.

Wir projizieren die Punktfolge F aus U^{n-r_0-1} in $S_i^{r_0}$. Es sei $(U^{n-r_0-1},\ p_\nu)\cap S_i^{r_0}=\bar{p}_\nu$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ $\bar{p}_\nu=p_\nu$ für $i\leqq\nu\leqq i+r_0$. Die Punktfolge $\bar{p}_\nu$ erfüllt gemäß Hilfssatz 1 die Forderungen des Satzes 2.

Es sei $\bar{S}_{i+\mu}^m=(\bar{p}_{i+\mu},\ \bar{p}_{i+\mu+1},\ \ldots,\ \bar{p}_{i+\mu+m})$ $(0\leqq m\leqq r_0-1;\ \mu=0,\ 1,\ \ldots)$

$\bar{S}_{i+1,\varrho-1}^{r_0-1}=(p_{i+1},\ \ldots,\ p_{i+\varrho-1},\ p_{i+\varrho+1},\ \ldots,\ \bar{p}_{i+r_0+1})$

$\bar{\mathfrak{S}}_{i+1,\varrho-1}^{r_0-1}=p_{i+1}\ldots p_{i+\varrho-1}p_{i+\varrho+1}\ldots\bar{p}_{i+r_0+1}$

$\bar{x}_{i+\mu}=\bar{S}_{i+\mu}^{r_0-1}\cap Z_i^1$; $\bar{x}_{i+1,\varrho-1}=\bar{S}_{i+1,\varrho-1}^{r_0-1}\cap Z_i^1$. $\bar{x}_i=x_i^{r_0-1}$; $\bar{x}_{i+1}=x_{i+1}^{r_0-1}$.

Es ist zu zeigen, daß das r-Simplex $\overline{\mathfrak{S}}_{i,\varrho}^{r_0} = p_i \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0}\, \overline{p}_{i+r_0+1}$ in $S_i^{r_0}$ positiv ist.

Wir wenden 7. Zusatz an. Dabei ist R^n durch $S_i^{r_0}$, U^k durch $U^{n-r_0+k} \cap S_i^{r_0}$ $(0 \leqq k \leqq r_0 - 1)$ zu ersetzen, also U^0 durch $U^{n-r_0} \cap S_i^{r_0} = x_i^{r_0}$.

Aus dem Zusatz folgt dann, daß auf Z_i^1 die Punkte $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}\, \bar{x}_{i+2} \dots x_i^{r_0}$ in dieser Reihenfolge liegen und nach dem in 9.2.2 Bewiesenen liegt $x_{i,\varrho}$ bzw. $\bar{x}_{i+1,\varrho-1}$ zwischen $\bar{x}_i$ und $\bar{x}_{i+1}$ bzw. zwischen $\bar{x}_{i+1}$ und $\bar{x}_{i+2}$.

Es liegen also die Punkte $x_i^{r_0-1}$, $x_{i,\varrho}$, $x_{i+1}^{r_0-1}$, $\bar{x}_{i+1,\varrho-1}$, $\bar{x}_{i+2}$, $x_i^{r_0}$ in dieser Reihenfolge auf Z_i^1.

Es ist ferner außer

$$x_i^{r_0-1} \in [S_i^{r_0-2}, p_{i+r_0-1}); \quad x_{i+1}^{r_0-1} \in [S_{i+1}^{r_0-2}, p_{i+r_0}) \text{ auch } x_{i,\varrho} \in [S_{i,\varrho}^{r_0-2}, p_{i+r_0});$$
$$\bar{x}_{i+1,\varrho-1} \in [S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}, \overline{p}_{i+r_0+1}).$$

Dabei wird berücksichtigt, daß nach Induktionsannahme $\mathfrak{S}_{i,\varrho}^{r_0-1}$, $\mathfrak{S}_{i+1}^{r_0-1}$ und $\overline{\mathfrak{S}}_{i+1,\varrho-1}^{r_0-1}$ gleich orientiert sind und $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$ und $S_{i+1,\varrho-1}^{r_0-2}$ der (r_0-2)-Sekanten-Hülle $H(S_i^{r_0-2}, S_{i+1}^{r_0-2}, S_{i+2}^{r_0-2})$ angehören.

Beachtet man ferner, daß $x_i^{r_0-1}$ und $p_{i+\varrho}$ in $S_i^{r_0-1}$ auf der gleichen oder entgegengesetzten Seite von $S_{i,\varrho}^{r_0-2}$ liegen, wenn $r_0 - \varrho$ ungerade oder gerade ist, und bedeutet $V(\mathfrak{S}_i^{r_0})$ das Vorzeichen des Simplex $\mathfrak{S}_i^{r_0}$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
V(\mathfrak{S}_i^{r_0}) &= V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+r_0-1}\, x_{i+1}^{r_0-1}) \\
&= (-1)^{r_0-\varrho-1}\, V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0-1}\, p_{i+\varrho}\, x_{i+1}^{r_0-1}) \\
&= V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0-1}\, x_i^{r_0-1}\, x_{i+1}^{r_0-1}) \\
&= V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0-1}\, x_{i,\varrho}\, \bar{x}_{i+1,\varrho-1}) \\
&= V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0}\, \bar{x}_{i+1,\varrho-1}) \\
&= V(p_i\, p_{i+1} \dots p_{i+\varrho-1}\, p_{i+\varrho+1} \dots p_{i+r_0}\, \overline{p}_{i+r_0+1}) \quad \text{w.z.z.w.}
\end{aligned}$$

10. Aus Hilfssatz 3, Behauptung 3 folgt nun, daß die Punktfolge $p_1, p_2 \dots$ auch nach Elimination eines und damit auch nach der Elimination von endlich vielen Punkten noch die Forderungen 1 und 2 des Satzes 2 erfüllt. Ist nun $1 \leqq \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n$, so erfüllt die Punktfolge $p_1, p_2 \dots p_{\nu_0-1}, p_{\nu_0}, p_{\nu_1}, p_{\nu_2} \dots p_{\nu_n}, p_{\nu_n+1} \dots$ Forderung 1 von Satz 2, woraus folgt, daß das n-Simplex $p_{\nu_0}\, p_{\nu_1} \dots p_{\nu_n}$ positiv orientiert ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

11. Es sei $F = p_1, p_2 \dots$ eine beschränkte monotone Punktfolge; die Koordinaten von p_i seien x_ν^i $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ q sei ein beliebiger Punkt in R^n.

$[q q_i)$ sei die zu $[p_{i-1} p_i)$ parallele Halbgerade.

Die Determinante $\begin{vmatrix} x_1^i & x_2^i & \dots & x_n^i & 1 \\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \dots & x_n^{i+1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i+n} & x_2^{i+n} & \dots & x_n^{i+n} & 1 \end{vmatrix}$ ist von 0 verschieden und hat für alle

$i \geqq 1$ das gleiche Vorzeichen. Dann ist auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{i+1} - x_1^i & x_2^{i+1} - x_2^i & \dots & x_n^{i+1} - x_n^i \\ x_1^{i+2} - x_1^{i+1} & x_2^{i+2} - x_2^{i+1} & \dots & x_n^{i+2} - x_n^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i+n} - x_1^{i+n-1} & x_2^{i+n} - x_2^{i+n-1} & \dots & x_n^{i+n} - x_n^{i+n-1} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden und hat immer das gleiche Vorzeichen.

Es sind daher je n aufeinanderfolgende Halbgerade $[q, q_{i+1})$, $[q, q_{i+2}) \dots [q, q_{i+n})$ und ihre Schnittpunkte $p'_{i+1}, p'_{i+2} \dots p'_{i+n}$ mit einer Hyperebene H^{n-1} für $i \geqq 1$ linear unabhängig und gleich orientiert; Die Punktfolge $F' = p'_2, p'_3 \dots$ erfüllt also Forderung 1 von Satz 2.

Ferner ist die k-Schmieg-Sekante S_i^k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ parallel zur k-Ebene $T_i^k = (q, q_{i+1}, q_{i+2} \dots q_{i+n})$. Aus $\lim_{i\to\infty} S_i^k = E^k$ (4) folgt daher $\lim_{i\to\infty} T_i^k = F^k || E^k$.

Der Halb-k-Schmieg-Sekante $[S_i^{k-1}, p_{i+k})$ entspricht die Halb-k-Ebene $[T_i^{k-1}, q_{i+k})$. Aus der Existenz einer Halb-k-Ebene als Limes von $[S_i^{k-1}, p_{i+k})$ folgt die Existenz einer Halb-k-Ebene F_+^k als Limes von $[T_i^{k-1}, q_{i+k})$ für $i \to \infty$.

Ist $S_i'^{k-1} = (p'_{i+1}, p'_{i+2} \dots p'_{i+k}) = T_i^k \cap H^{n-1}$, so ist $\lim_{i\to\infty} [S_i'^{k-2}; p'_{i+k}) = \lim_{i\to\infty} [T_i^{k-1}; q_{i+k}) \cap H^{n-1} = F_+^k \cap H^{n-1}$.

F' erfüllt daher Forderung 2' von Satz 2.

Von einem Punkt ausgehende Halbgerade bilden eine monotone Folge, wenn ihre Schnittpunkte mit einer Hyperebene eine monotone Folge bilden.

Man erhält also als Verallgemeinerung von Theorem 16 den

SATZ 3. *Die zu den gerichteten 1-Schmieg-Sekanten einer beschränkten monotonen Punktfolge $p_0, p_1 \dots$ im R^n parallelen von einem Punkt q ausgehenden Halbgeraden bzw. ihre Schnittpunkte p'_i $(i \geqq 1)$ mit einer zu q fremden Hyperebene bilden eine schließlich monotone Folge.*

Ist nun $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, so ist auch $p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, p_{\nu_3} \dots$ eine monotone Folge, da jede Teilfolge einer monotonen Folge auch eine monotone Folge ist. Nach Satz 3 bilden auch die von q ausgehenden zu $[p_{\nu_1}; p_{\nu_2})$, $[p_{\nu_3}; p_{\nu_4})$, $[p_{\nu_5}; p_{\nu_6}) \dots$ parallelen Halbgeraden und deren unendlichen Teilfolgen schließlich monotone Folgen.

Daraus ergibt sich

SATZ 4. *Die von einem Punkt q ausgehenden zu den Halb-Sekanten $[p_{\nu_1}; p_{\nu_2})$, $[p_{\nu_3}; p_{\nu_4})$, $[p_{\nu_5}; p_{\nu_6}) \dots$ $(\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots)$ einer beschränkten monotonen unendlichen Punktfolge $p_0, p_1, p_2 \dots$ parallelen Halbgeraden bilden eine schließlich monotone Halbgeradenfolge.*

Ist C ein monotoner Bogen, so ist jede im Sinn einer Orientierung von C auf C angeordnete Punktfolge monoton. Hieraus und aus Satz 4 folgt dann durch Grenzübergang von den Halbsekanten zu den Halbtangenten das am Anfang dieser Arbeit angeführte Theorem 28 von HJELMSLEV (s. HJELMSLEV, a.a.O., S. 64).

Erlangen, Hindenburgstr. 14

(Eingegangen am 22. September 1960)

Ingenieur-Mathematik

Von Dr. ROBERT SAUER,
Professor an der Technischen Hochschule München

Zweiter Band

Differentialgleichungen und Funktionentheorie

Mit 95 Abbildungen. XII, 180 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 18,—

ZUR INFORMATION

Der Inhalt des hier vorliegenden zweiten Bandes der „Ingenieur-Mathematik" umfaßt Vektoranalysis, gewöhnliche Differentialgleichungen, FOURIER-Reihen, Funktionentheorie. Er entspricht also etwa dem Stoff, der in den Kursvorlesungen der Technischen Hochschulen im dritten und vierten Semester für die Studierenden der Ingenieurwissenschaften und der Physik gebracht wird. Wiederum wird versucht, durch geometrische und physikalische Veranschaulichung das Verständnis zu erleichtern und das Interesse anzuregen. Diesem Ziel dient insbesondere die eingehende Erörterung von Anwendungen in der Strömungslehre und Elektrostatik. Im Abschnitt über Differentialgleichungen wird auf lineare Schwingungsprobleme, im Abschnitt über Funktionentheorie auf konforme Abbildungen und die Auswertung komplexer Integrale ausführlich eingegangen. Einfachste Beispiele liefern Ausblicke auf die Theorie der Rand- und Eigenwertprobleme und auf das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Numerische Methoden nehmen wie im ersten Band einen verhältnismäßig breiten Raum ein.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse

Von E. B. Dynkin,
Professor der Fakultät für Mathematik und Mechanik der Universität Moskau

Ins Deutsche übertragen von Dr. Josef Wloka,
Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 108)

XII, 174 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 29,80; Ganzleinen DM 33,80

ZUR INFORMATION

Ziel dieses Buches ist die Untersuchung der logischen Grundlagen der Theorie der Markoffschen Zufallsprozesse. Es wird eine allgemeine Theorie aufgebaut, die auch inhomogene Prozesse umfaßt; auch können die hier behandelten Prozesse in einem vom Zufall abhängigen Zeitaugenblick abbrechen. Die weitverbreitete Auffassung eines Markoffschen Prozesses als einer Zufallsfunktion spezieller Form erweist sich für den Aufbau der Theorie als unzulänglich. Tatsächlich hat man es beim Studium Markoffscher Prozesse nicht nur mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß zu tun, sondern mit einem ganzen System derartiger Maße; diese Maße entsprechen allen möglichen Anfangszeitmomenten, sowie allen möglichen Anfangszuständen; anders ausgedrückt: Man hat es nicht nur mit einer einzigen Zufallsfunktion zu tun, sondern mit einem ganzen System derartiger Funktionen, die in bestimmter Weise miteinander zusammenhängen. Dies ist einer der Gründe für die bekannte Autonomie der Markoffschen Prozesse innerhalb der allgemeinen Theorie der Wahrscheinlichkeitsprozesse. Im vorliegenden Buch wird die Theorie der Markoffschen Prozesse ohne Hinweis auf die allgemeine Theorie der Wahrscheinlichkeitsprozesse aufgebaut. Das Buch ist kein Lehrbuch für Anfänger. Obwohl es formell keine Anfangskenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie voraussetzt, kann es nur einem Leser von Nutzen sein, der schon mit elementaren Darlegungen der Markoffschen Prozesse vertraut ist.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzbu
Printed in Germany